УДК 161.803:398

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ НА МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКАХ

Красота Олена

Науковий керівник: професор Волков Ю.І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В даній статті висвітлюються методичні особливості викладання теорії наближень та розглянуто використання проблемних методів навчання на математичному гуртку для учнів старшої школи. Наведено приклад проблемного викладу навчального матеріалу, який містить три способи розв'язування завдання, використовуючи поліноми Лагранжа та Ньютона. Проведений аналіз орієнтовних фундаментальних математичних понять шкільної програми, які зустрічаються в теорії наближень. Продемонстровано перетворення інтерполяційних многочленів у єдиний інтерполяційний поліном, який існує. Зроблено висновок про те, що проведення дослідницької діяльності в позакласній роботі розвиває дослідницький досвід учнів, особистість, пізнавальний інтерес.

Ключові слова: *позакласна робота, теорія наближень, інтерполяція, інтерполяційний многочлен, проблемно-пошуковий метод, проблемний виклад.*

Methods of teaching theory of approximations in mathematics circles

O. Krasota

Scientific supervisor: Professor Volkov Yu.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

This article highlights the methodological features of teaching the theory of approximations and considers the use of problem-based teaching methods in the mathematics circles for high school students. An example of a problem-based presentation of educational material is given, which contains three ways to solve the problem using Lagrange and Newton polynomials. The analysis of approximate fundamental mathematical concepts of the school program which are in the theory of approximations is carried out. The transformation of interpolation polynomials into a single existing interpolation polynomial is demonstrated. It is concluded that conducting research activities in extracurricular activities develops students' experimental experience, personality, cognitive interest.

Keywords: *extracurricular work, theory of approximations, interpolation, interpolation polynomial, problem-search method, problem statement.*

Постановка проблеми. Однією найпоширенішою формою організації позакласної роботи є гурток. З розвитком методів навчання з'являється проблемно-пошуковий метод, який тісно пов'язаний з методами проблемного викладу та частково-пошуковими. В результаті чого вчителі почали все частіше використовувати його на уроках та впроваджувати в позакласну роботу. Якщо при використанні проблемно-пошукового методу на уроці, при деяких випадках не вистачало часу, то при проведенні предметних гуртків з математики – це є одним з найактуальніших методів навчання.

Аналіз досліджень і публікацій. Слєпкань З.І. у своїй роботі [6, 143] зауважила, що позакласна робота з математики – це заняття, які проводяться в позаурочний час, ґрунтуються на принципі добровільної участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета шляхом поглиблення і розширення базового змісту програми.

Бевз Г.П. у [1, 102-103] зауважив, що проблемний метод недоречно використовувати часто, не для кожної навчальної програми знайдеться матеріал, який буде задовольняти умови. Тому автор рекомендує поєднати його з репродуктивним та іншими методами пізнання.

Як правило, гурток об'єднує учнів, захоплених предметом, які бажають закріпити і поповнити свої знання, в дітей розвивається пізнавальний інтерес, логічне мислення, увага та уява.

Даним питанням також були присвячені роботи Дьюї Д.А, Лернера І.Я., Хуторського А.В, Махмутової М.І., Павленко В.В.[4], Курлянд З.Н.[7] та інших.

Мета статті: використання проблемно-пошукової діяльності та аналіз методичних особливостей викладання теорії наближень на математичному гуртку для учнів 10 – 11 класів.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Перш ніж почати розв'язувати задачі з теорії апроксимації на шкільних гуртках з математики, для учнів 10-11 класів потрібно пояснити, які математичні завдання вона виконує. Тому на перших заняттях уже потрібно роз'яснити, що спільного та відмінного між апроксимацією, інтерполяцією функції, а також екстраполяцією.

Апроксимація – науковий метод, що полягає в заміні одних об'єктів іншими, близькими до вихідних, але простішими.

Екстраполяція – тип апроксимації при якому функція апроксимується за межами заданого інтервалу.

Інтерполяція – тип апроксимації при якому знаходяться проміжні значення величини за даним набором дискретних даних [2].

Також вчителю потрібно проаналізувати, які поняття учні вже вивчили в шкільній програмі, що використовуються в теорії наближень. Дивлячись таблицю 1 ми бачимо, якими фундаментальними поняттями повинні володіти учні для засвоєння нових знань та формування умінь з теорії наближень.

Таблиця 1

Основні математичні поняття шкільної програми, які зустрічаються в теорії наближень

3	Графік функції ⇒	Побудова графіка функції, побудова точок функції в системі координат
2	Функція ⇒	Способи задання функції, поняття неперервної функції, монотонної функції, властивості функцій, многочлени (які представляються у вигляді функцій)
1	Система координат ⇒	Поняття точки, вісь абсцис, вісь ординат, початок системи координат

Проблемне навчання забезпечує можливість творчої участі учнів у процесі засвоєння нових знань, формування пізнавальних інтересів і творчого мислення, високий ступінь засвоєння знань і мотивації учнів. Основою для цього є моделювання творчого процесу шляхом створення проблемної ситуації й управління пошуком розв’язання проблеми. Усвідомлення і розв’язок проблемних ситуацій відбувається за оптимальної самостійності учнів, але під загальним керівництвом педагога в ході спільної взаємодії [4].

При вивченні інтерполяційних поліномів потрібно пояснити учням, що інтерполяційні многочлени: канонічний, Лагранжа, Ньютона – представляють свій метод знаходження інтерполяційного полінома.

Отже, розглянемо задачу, яку детально демонструють ці методи.

Вчитель при викладанні даного матеріалу повинний створити проблемну ситуацію (задачу), проблемний метод крім вище перелічених можливостей учнів, які розвиваються, також розвиває і навчальну мотивацію, яка тісно пов'язана з дослідницькою діяльністю.

Проблемний виклад: задана таблиця дискретних даних функції, представлених в таблиці 2, аналітичне задання якої невідоме. Знайдіть інтерполяційний многочлен до цієї функції.

Таблиця 2

Дискретні дані функції

x	1	2	3	4
y	5	8	1	3

На цьому етапі вчитель повинний акцентувати увагу на те, що переважна більшість дітей ніколи не вивчала цей навчальний матеріал, і треба пояснити доступно найважливіші елементи в ньому. Враховуючи те, що теорія наближень не починається з методів інтерполяції, доцільно провести актуалізацію опорних знань учнів з даної теми. Тому рекомендується провести опитування:

– чим відрізняється інтерполяція від апроксимації?;

– для чого ми використовуємо інтерполяцію?;

– які існують інтерполяційні поліноми?;

В залежності від викладеного матеріалу питання можуть змінюватися. Також від відповідей учнів вчитель відразу визначить, чи орієнтуються діти у вивченому матеріалі.

Метод 1. Розв'язання методом невизначених коефіцієнтів

На цьому етапі вчитель пояснює учням, що під поняттям дискретні дані в даній задачі розуміються дані функції (невідомої аналітично), яка задана таблицею.

Побудуємо дані в системі координат, побудова зображена на рисунку 1:

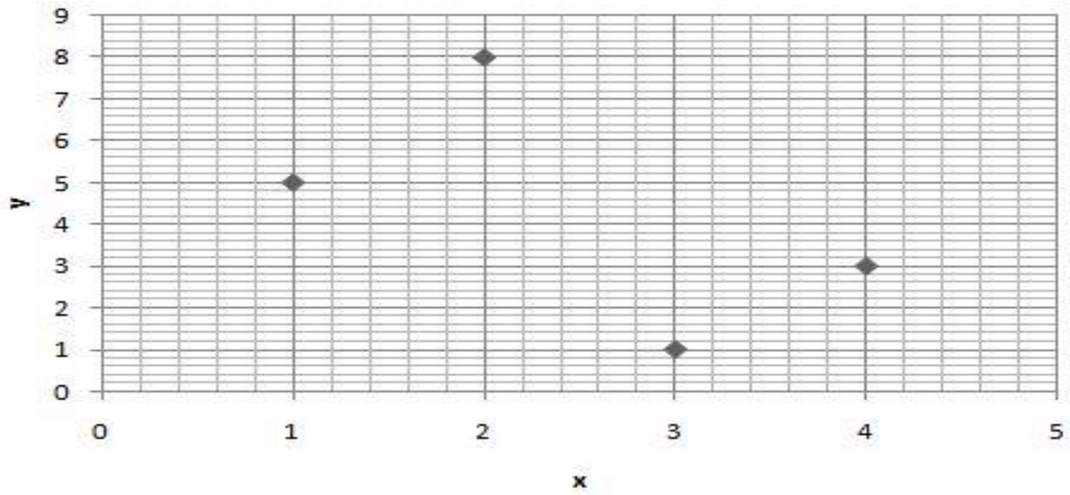

Рис. 1. Зображення точок функції в системі координат

Для знаходження полінома нам потрібно скласти систему лінійних рівнянь (1), де a_k – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти [5]:

$$\begin{cases} 1^3 a_3 + 1^2 a_2 + a_1 + a_0 = 5 \\ 2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 2a_1 + a_0 = 8 \\ 3^3 a_3 + 3^2 a_2 + 3a_1 + a_0 = 1 \\ 4^3 a_3 + 4^2 a_2 + 4a_1 + a_0 = 3 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 5 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 8 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 1 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 3 \end{cases} \qquad (2)$$

Розв’яжемо систему лінійних рівнянь (2) методом Крамера. Обчислимо головний детермінант СЛР, використовуючи його алгебраїчне доповнення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 27 & 3 & 1 \\ 64 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 27 & 9 & 1 \\ 64 & 16 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \\ 64 & 16 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix}4&2&1\\9&3&1\\16&4&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&2&1\\27&3&1\\64&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&4&1\\27&9&1\\64&16&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&4&2\\27&9&3\\64&16&4\end{vmatrix}=$$

$$=k_1-k_2+k_3-k_4.$$

Демонстрація покрокового обчислення визначників:

$$k_1=(4\cdot3\cdot1+9\cdot4\cdot1+16\cdot1\cdot2)-(16\cdot1\cdot3+9\cdot2\cdot1+4\cdot1\cdot4)=80-82=-2$$

$$k_2=(8\cdot3\cdot1+27\cdot4\cdot1+64\cdot2\cdot1)-(64\cdot3\cdot1+4\cdot1\cdot8+1\cdot27\cdot2)=260-278=-18$$

$$k_3=(8\cdot9\cdot1+27\cdot1\cdot16+64\cdot1\cdot4)-(1\cdot9\cdot64+1\cdot16\cdot8+1\cdot27\cdot4)=760-812=-52$$

$$k_4=(8\cdot9\cdot4+27\cdot2\cdot16+64\cdot4\cdot3)-(2\cdot9\cdot64+3\cdot16\cdot8+4\cdot27\cdot4)=1920-1968=-48.$$

Отже, головний визначник:

$$\Delta=k_1-k_2+k_3-k_4=-2+18-52+48=12.$$

Далі для знаходження невідомих коефіцієнтів нам потрібно обчислити ще чотири визначники $(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4)$:

$$a_3=\frac{\Delta_1}{\Delta};a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};a_1=\frac{\Delta_3}{\Delta};a_0=\frac{\Delta_4}{\Delta}.$$

Тепер нам потрібно звернути увагу на те, що наступні детермінанти будуть обчислюватися аналогічно до Δ, але стовпці визначників $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$ будуть замінюватись y_k, по черзі з першого стовпця Δ_1 і до четвертого стовпця Δ_4. Обчислимо всі чотири визначники.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\8&4&2&1\\1&9&3&1\\3&16&4&1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&2&1\\9&3&1\\16&4&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8&2&1\\1&3&1\\3&4&1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8&4&1\\1&9&1\\3&16&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}8&4&2\\1&9&3\\3&16&4\end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot\begin{vmatrix}4&2&1\\9&3&1\\16&4&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&2&1\\1&3&1\\3&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&4&1\\1&9&1\\3&16&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&4&2\\1&9&3\\3&16&4\end{vmatrix}=5\cdot(-2)+9-59+98=38.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\8&8&2&1\\27&1&3&1\\64&3&4&1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}8&2&1\\1&3&1\\3&4&1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8&2&1\\27&3&1\\64&4&1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8&8&1\\27&1&1\\64&3&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}8&8&2\\27&1&3\\64&3&4\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}8&2&1\\1&3&1\\3&4&1\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}8&2&1\\27&3&1\\64&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&8&1\\27&1&1\\64&3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&8&2\\27&1&3\\64&3&4\end{vmatrix}=-9+90+297-666=-288.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\8&4&8&1\\27&9&1&1\\64&16&3&1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&8&1\\9&1&1\\16&3&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8&8&1\\27&1&1\\64&3&1\end{vmatrix}+$$

$$+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8&4&1\\27&9&1\\64&16&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}8&4&8\\27&9&1\\64&16&3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4&8&1\\9&1&1\\16&3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&8&1\\27&1&1\\64&3&1\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}8&4&1\\27&9&1\\64&16&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&4&8\\27&9&1\\64&16&3\end{vmatrix}=59-297+5\cdot(-52)+1132=634.$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\8&4&2&8\\27&9&3&1\\64&16&4&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&2&8\\9&3&1\\16&4&3\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8&2&8\\27&3&1\\64&4&3\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8&4&8\\27&9&1\\64&16&3\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}8&4&2\\27&9&3\\64&16&4\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4&2&8\\9&3&1\\16&4&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}8&2&8\\27&3&1\\64&4&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&4&8\\27&9&1\\64&16&3\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}8&4&2\\27&9&3\\64&16&4\end{vmatrix}=-98+666-1132-5\cdot(-48)=-324.$$

При демонстраціях методів вперше, потрібно приділити увагу до пояснення визначників та їх обчислень n-го порядку, бо визначник четвертого порядку матиме інші методи обчислення, в наступних випадках можна показати й інші методи обчислення визначників; наголосити, що СЛР крім метода Крамера розв’язується методами Гауса, матричним та іншими.

Після того як були обчислені всі потрібні визначники, можемо знайти невідомі коефіцієнти:

$$a_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{38}{12} = \frac{19}{6} \approx 3{,}166;$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-288}{12} \approx -24;$$

$$a_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{634}{12} = \frac{317}{6} \approx 52{,}833;$$

$$a_0 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-324}{12} \approx 27.$$

Складаємо інтерполяційний поліном:

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Отже,

$$y = 3{,}166\,x^3 - 24\,x^2 + 52{,}833x - 27.$$

Побудуємо графік многочлена до функції, який проходить через задані точки, який зображено на рисунку 2:

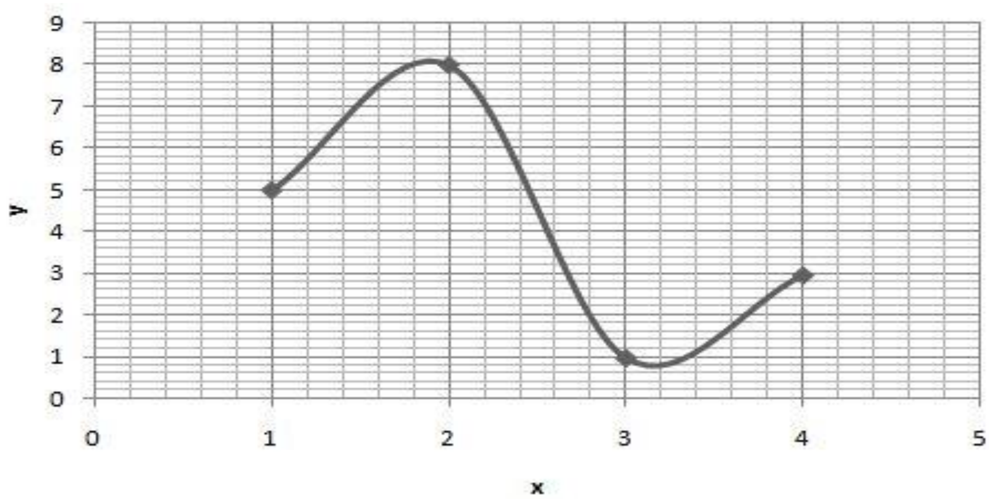

Рис. 2. Інтерполяційний поліном методу 1

Відповідь: Інтерполяційний поліном методу 1:

$$y = 3{,}166\,x^3 - 24\,x^2 + 52{,}833x - 27.$$

Метод 2. Розв’язання методом Лагранжа

Представимо дискретні дані таблиці 2 у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

Альтернативне представлення даних заданої функції

x_0	x_1	x_2	x_3
1	*2*	*3*	*4*
y_0	y_1	y_2	y_3
5	*8*	*1*	*3*

Запишемо поліном Лагранжа [5, 45]:

$$L(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Використовуючи, табл. 3 підставимо дані та обчислимо:

$$L(x)=5\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+8\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+3\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}.$$

$$L(x)=\frac{5x^3-45x^2+130x-120}{-6}+\frac{4x^3-32x^2+76x-48}{1}+$$

$$+\frac{x^3-7x^2+14x-8}{-2}+\frac{x^3-6x^2+11x-6}{2}=$$

$$=\frac{-5x^3+24x^3+45x^2-192x^2+21x^2-18x^2-130x+456x-42x+33x+120-288+24-18}{6}=$$

$$=\frac{19x^3-144x^2+317x-162}{6}.$$

Відповідь: Інтерполяційний поліном методу 2:

$$L(x)=3{,}166x^3-24x^2+52{,}833x-27.$$

Метод 3. Розв’язання методом Ньютона

Даний метод використовується, коли дані рівновіддалені, в нашому випадку відстань між $x_k-h=1$.

Складемо таблицю різниць [3], які запишемо у таблиці 4:

Таблиця 4

Обчислення різниць за Ньютоном

y	5	8	1	3
$\Delta y_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}$	$8-5=3$	$1-8=-7$	$3-1=2$	-
$\Delta^2 y_k = \dfrac{\Delta y_{k+1} - \Delta y_k}{h}$	$-7-3=-10$	$2+7=9$	-	-
$\Delta^3 y_k = \dfrac{\Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k}{h}$	$9+10=19$	-	-	-

Складемо многочлен Ньютона [5, 57]:

$$f(x) = \frac{5}{0!1^0} + \frac{3}{1!1^1}(x-1) + \frac{-10}{2!1^2}(x-1)(x-2) + \frac{19}{3!1^3}(x-1)(x-2)(x-3) =$$

$$= 5 + 3x - 5x^2 + 15x - 10 + 3{,}166x^3 - 18{,}996x^2 + 34{,}826x - 18{,}996 =$$

$$= 3{,}166x^3 - 23{,}996x^2 + 52{,}826x - 26{,}996.$$

Відповідь: Інтерполяційний поліном методу 3:

$$f(x) = 3{,}166x^3 - 23{,}996x^2 + 52{,}826x - 26{,}996.$$

За розглянутими вище трьома методами в залежності від даних, многочлени трьох методів можуть збігатися, або мати незначні відхилення один від одного. Але в загальному розумінні – це єдиний інтерполяційний многочлен, який існує (табл. 5); який в різних методах може мати інший вигляд, який зводиться до єдиного полінома, який існує.

Таблиця 5

Класифікація основних інтерполяційних многочленів

Інтерполяційні многочлени $\Downarrow$		
Канонічний $\Downarrow$	Лагранжа $\Downarrow$	Ньютона $\Downarrow$
Єдиний інтерполяційний поліном, який існує		

Бачимо, що інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона (рис. 3) збіглися з канонічним поліномом:

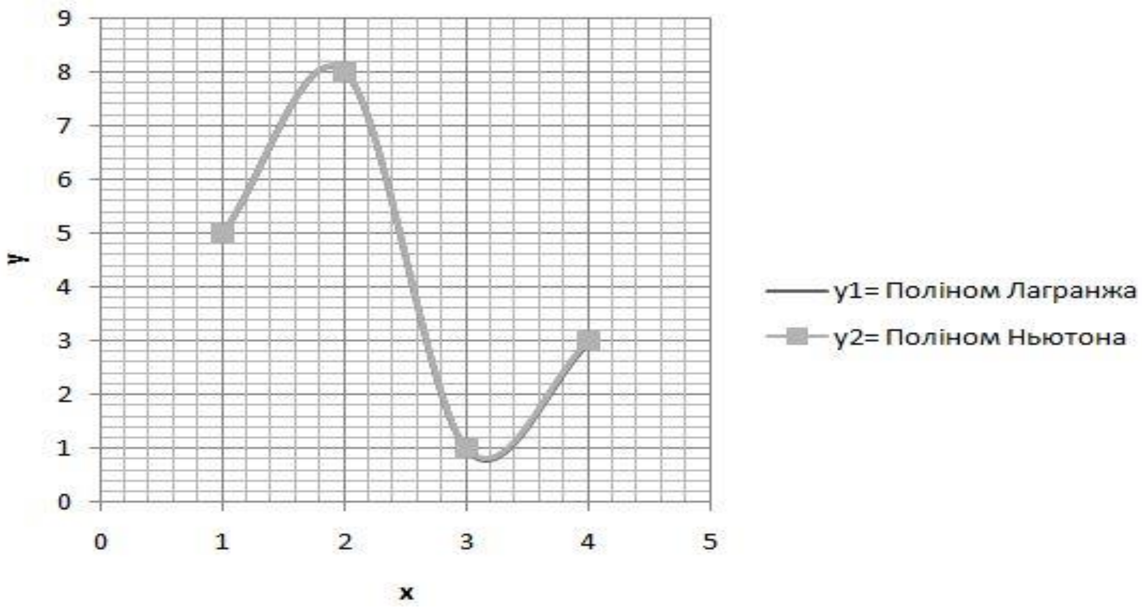

Рис. 3. Ілюстрація інтерполяційних поліномів

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Вивчення апроксимативного матеріалу має бути спрямоване на розвиток особистості школяра, розширювати можливості його спілкування з сучасними джерелами інформації, удосконалювати вміння орієнтуватися в суспільних процесах, аналізувати ситуації й приймати обґрунтовані рішення, розвивати уявленнями про наближення функцій. Гурток готує учнів до участі в загальношкільних заходах, сприяє їх самопізнанню, самовираженню. Заняття гуртка не регламентовані навчальною програмою. Розглянуті в статті способи знаходження інтерполяційного полінома можна використати на позакласних та факультативних заняттях. У зв'язку з цим відкриваються необмежені можливості для дослідницької діяльності учнів. Основними перевагами частково-пошукового методу є розвиток самостійності учнів, формування пізнавального інтересу або особистісної мотивації учня, розвиток наукової думки, формування досвіду дослідницької діяльності. В цьому полягають подальші дослідження в методиці викладання теорії наближень на математичних гуртках в старшій школі.

Список використаної літератури

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики [Текст] : навч. посібник / Г.П. Бевз. - 3-є вид., перероб. і допов. - К. : Вища школа, 1989. - 367 с.

2. Валов А. В. Численные методы решения уравнений для инженеров: Учебное пособие / А.В. Валов. - Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. - 110 с.

3. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций [Текст] / Гончаров, В. Л. - 2-е изд., перераб. - М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1954. - 327 с.

4. Павленко В.В. Методи проблемного навчання / В. В. Павленко // Нові технології навчання : нвук.-пед. зб. // Інститут інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки, Академія міжнародного співробітництва з креативної підготовки. – Київ, 2014. – Вип. 81 (спецвипуск). – 84 с. – С. 75-79.

5. Практикум: «Чисельні методи» : вказ. до виконання практ. завдань : для студ. денної та заоч. форми навч. за спец. 123 “Комп’ютерна інженерія”, 125 “Кібербезпека” / [уклад. : Г. М. Дрєєва, О. М. Дрєєв, Н. М. Якименко, О. О. Денисенко] ; М-во освіти і науки України, Центральноукраїн. нац. техн. ун-т, каф. кібербезпеки та програмного забезпечення. - Кропивницький : ЦНТУ, 2019. - 90 с.

6. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. / З.І. Слєпкань. – 2.-ге вид., доп. і перероб. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.

7. Теорія і методика професійної освіти : навч. посіб. / З. Н. Курлянд, Т. Ю. Осипова, Р. С. Гурін; за ред. З. Н. Курлянд. – К. : Знання, 2012. – 390 с.