

УДК 004.03

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСЦИЛЯТОРІВ НА БАЗІ РІВНЯННЯ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Ірха Назар

**Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук Гуртовий Ю.В.**

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені*

*Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

*Стаття присвячена загальним принципам створення програм в середовищі Maple.*

*Показано приклад створення програми, яка будує фазові портрети для осцилятора на основі нелінійного рівняння Ван дер Поля. Всі результати проілюстровано графічно.*

*Ключові слова: Maple, рівняння Ван дер Поля, чисельні методи.*

## COMPUTER MODELLING OF OSCILLATORS BASED ON VAN DER POL EQUATION

Irha Nazar

**Scientific supervisor: Yu.V. Hurtovyi, PhD**

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,*

*Kropyvnytskyi, Ukraine*

*The article deals with the general principles of creating applications in the Maple environment. An example of creating a program that builds phase portraits for an oscillator based on the nonlinear van der Paul equation is shown. All results are illustrated graphically.*

*Keywords: Maple, Van der Pol equation, numerical methods.*

**Постановка проблеми.** При моделюванні будь-яких явищ або процесів реального світу, які пов'язані з коливаннями тієї чи іншої природи, дослідники часто стикаються зі складними труднощами математичного характеру, оскільки більшість задач такого типу приводять до рівнянь або систем рівнянь, що містять нелінійні члени і рідко можуть бути розв'язані точно. Тому дослідження таких явищ вимагає різного типу спрощень формальної математичної постановки задачі або використання чисельних методів. Апробація таких методів дослідження проводиться на більш простіших моделях, з подальшим перенесенням самих методів на моделі складнішої

природи. Такий підхід отримав назву toy-models (тренувальні моделі, іграшкові моделі).

### **Аналіз досліджень і публікацій.**

В роботі [1] досліджується рівняння Ван дер Поля з коефіцієнтами з запізненням. Отримані асимптотики розв'язків та досліджено їх стійкість на основі чисельних методів різної складності.

В роботі [2] запропоновано підхід, який базується на теорії ФГКК, для доведення існування сильних розв'язків граничних задач для звичайного диференціального рівняння типу Ван дер Поля.

В дослідженні [3] досліджуються системи, які описують рух матеріальної точки по прямій з абсолютно пружними ударами об нерухому стінку. Наводяться умови загального вигляду, достатні для наявності в системі хаотичних інваріантних множин. Описується механізм утворення такого типу множин.

В статті [4] запропоновано алгоритм стохастичного розпаралелення для відстеження траєкторій нелінійних динамічних систем. Для численної ілюстрації досліджено випадково збуджений генератор Ван дер Поля з метою вивчення продуктивності алгоритму

В роботі [5] знайдено загальну структуру незвідних інваріантних алгебраїчних кривих для многочлена динамічної системи. Виведені необхідні умови існування експонентних факторів, пов'язаних з інваріантною алгебраїчною кривою. Як наслідок, отримані всі випадки, коли класичні осцилятори Ван дер Поля і Дуффінга-Ван-дер-Поля мають перші інтеграли Ліувілля.

В дослідженні [6] проведено аналіз резонансної поведінки осцилятора Ван дер Поля під дією зовнішніх сил. На підставі методу гармонійного балансу отримано приблизні аналітичні розв'язки першого порядку. Порівняно отримані наближені аналітичні розв'язки з чисельними.

В статті [7] аналізується динаміка генератора Ван-дер-Поля-Дуффінга , керованого параметричним зворотнім зв'язком у вигляді експоненціальної

функції з часовою затримкою. Досліджуються різні форми розривної динаміки. Періодичні та квазіперіодичні розв'язки перевіряються аналітично та чисельно.

В [8] застосовано метод гомо топічного аналізу для вивчення системи з двома степенями свободи, яка пов'язана з системою Ван дер Поля. Знайдено періодичні рішення для обох систем. Отримані розв'язки порівнюються з чисельним аналізом.

В статті [9] розглядаються диференціальні рівняння Ван дер Поля з імпульсними ефектами. Доведено існування гармонічних розв'язків та субгармонійних розв'язків.

В роботі [10] представлено нова форма методу гомо топічних збурень для розв'язування нелінійних рівнянь типу Ван дер Поля. Наведено приклади використання нового методу, які дають результати отримані раніше.

**Мета статті:** показати можливості створення програмних додатків в середовищі Maple на прикладі створення програми для візуалізації осцилятора Ван дер Поля.

#### **Основна частина.**

Рівняння Ван дер Поля має наступний вигляд :

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x + A\sin(\omega t), \quad (1)$$

Де  $\mu$  - коефіцієнт, який характеризує не лінійність та силу затухань осцилятора,  $A$  – амплітуда зовнішнього гармонічного сигналу,  $\omega$  – частота цього сигналу. Вимушених коливань. Рівняння (1) є нелінійним рівнянням другого порядку. Задамо для нього початкові умови:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \quad (2)$$

Поставимо задачу: реалізувати чисельний метод розв'язку задачі Коші (1) – (2) з використанням техніки рядів Тейлора до 5-го порядку включно.

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$x(h) = x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{1!}h + \frac{\ddot{x}(0)}{2!}h^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{3!}h^3 + \frac{x^{(4)}(0)}{4!}h^4 + \frac{x^{(5)}(0)}{5!}h^5 + o(h^5), \quad (3)$$

де  $h$  – це приріст часової змінної. Додатково розглянемо розклад в ряд Тейлора першої похідної. Для цього знайдемо похідну виразу (3) по  $h$  та врахуємо лише доданки до 5-го порядку. Отримаємо:

$$\dot{x}(h) = \dot{x}(0) + \frac{\ddot{x}(0)}{1!}h + \frac{\dddot{x}(0)}{2!}h^2 + \frac{x^{(4)}(0)}{3!}h^3 + \frac{x^{(5)}(0)}{4!}h^4 + o(h^5). \quad (4)$$

В розкладах (2.3) – (2.4) невідомими є коефіцієнти ряду Тейлора  $\ddot{x}(0)$ ,  $\dddot{x}(0)$ ,  $x^{(4)}(0)$  та  $x^{(5)}(0)$ . Значення  $x(0)$  та  $\dot{x}(0)$  беруться з початкових умов (2.2). Для знаходження невідомих коефіцієнтів про диференціюємо рівняння (2.1) по  $t$  тричі. Отримаємо наступні рівності:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \mu(1 - x^2)\dot{x} - x + A\sin(\omega t), \\ \dddot{x} &= -2\mu x\dot{x}^2 + \mu(1 - x^2)\ddot{x} - \dot{x} + A\omega\cos(\omega t), \\ x^{(4)} &= -2\mu\dot{x}^3 - 6\mu x\dot{x}\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dddot{x} - \ddot{x} - A\omega^2\sin(\omega t), \quad (5) \\ x^{(5)} &= -12\mu\dot{x}^2\ddot{x} - 6\mu x\ddot{x}^2 - 8\mu x\dot{x}\dddot{x} + \\ &\quad + \mu(1 - x^2)x^{(4)} - \ddot{x} - A\omega^3\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Використовуючи рівності (5) та рівняння (1) ми можемо обчислити невідомі значення  $\ddot{x}(0)$ ,  $\dddot{x}(0)$ ,  $x^{(4)}(0)$  та  $x^{(5)}(0)$ . Відмітимо, що розв'язок, отриманий таким способом є наближеним і буде відповідати невідомій функції лише в околі точки  $t = 0$ .

Якщо потрібно знайти розв'язок на відрізку  $t \in [0; T]$ , то будемо діяти наступним чином. Розіб'ємо відрізок на  $n$  рівних частин з кроком  $h$ . На основі

початкових умов (2) та рівностей (5) обчислимо невідомі значення похідних другого порядку і вище в точці  $t = 0$ . За формулами (3) та (4) обчислимо нове значення положення точки та нову швидкість в точці  $t = h$ . Обчислені значення  $x(h)$  та  $\dot{x}(h)$  приймемо за нові початкові умови та повторимо процедуру, описану вище. Таким чином, ми отримаємо в результаті матрицю, яка буде складатися з трьох стовпців та кількості рядків, яка відповідає кількості точок розбиття  $n + 1$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & x(0) & \dot{x}(0) \\ h & x(h) & \dot{x}(h) \\ 2h & x(2h) & \dot{x}(2h) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T & x(T) & \dot{x}(T) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Матриця (6) і буде відповіддю на поставлену задачу про знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (1) – (2) з використанням техніки рядів Тейлора до 5-го порядку включно. На основі отриманої матриці ми можемо побудувати траєкторію частинки та фазовий простір в залежності від різних значень параметрів рівняння та початкових умов.

Вказана чисельна схема (5) з рівностями (3) та (4) буде використана при створенні програми в середовищі Maple для побудови траєкторій та фазового простору для різних параметрів рівняння та довільних початкових умов. Для прикладу, наведемо функцію, яка обчислює значення 5-ої похідної:

```
fifeDerivationOnX := proc (mu, StartPosition, StartVelocity)
local SDerivation, TDerivation, FDerivation;
SDerivation := secondDerivationOnX(mu, StartPosition, StartVelocity);
TDerivation := thirdDerivationOnX(mu, StartPosition, StartVelocity);
FDerivation := forthDerivationOnX(mu, StartPosition, StartVelocity);
return -12*mu*StartVelocity^2*SDerivation- 6*mu*StartPosition*SDerivation^2 -
8*StartVelocity*mu*StartPosition*TDerivation +mu*(1-
```

$\text{StartPosition}^2 * \text{FDerivation} - \text{TDerivation}$

**end proc;**

Далі покажемо, як відбувається обчислення чисельного розв'язку задачі (1)-(2), та отримання результату у вигляді (6):

**for i from 2 to Count do**

$d2 := \text{secondDerivationOnX}(\mu, \text{StartPosition}, \text{StartVelocity});$

$d3 := \text{thirdDerivationOnX}(\mu, \text{StartPosition}, \text{StartVelocity});$

$d4 := \text{forthDerivationOnX}(\mu, \text{StartPosition}, \text{StartVelocity});$

$d5 := \text{fifeDerivationOnX}(\mu, \text{StartPosition}, \text{StartVelocity});$

$\text{StartPosition} := \text{StartPosition} + \text{StartVelocity} * \text{Step} + d2 * \text{CONST1} + d3 * \text{CONST2} + d4 * \text{CONST3} + d5 * \text{CONST4};$

$\text{StartVelocity} := \text{StartVelocity} + d2 * \text{Step} + d3 * \text{CONST1} + d4 * \text{CONST2} + d5 * \text{CONST3};$

$\text{RezultMatrix}[i, 1] := \text{StartPosition};$

$\text{RezultMatrix}[i, 2] := \text{StartVelocity}$

**end do;**

В результаті, отримаємо матрицю  $\text{RezultMatrix}$ , яка і буде шуканим чисельним розв'язком задачі. Використавши команду

**pointplot**( $\text{RezultMatrix}$ );

отримаємо наступний фазовий портрет

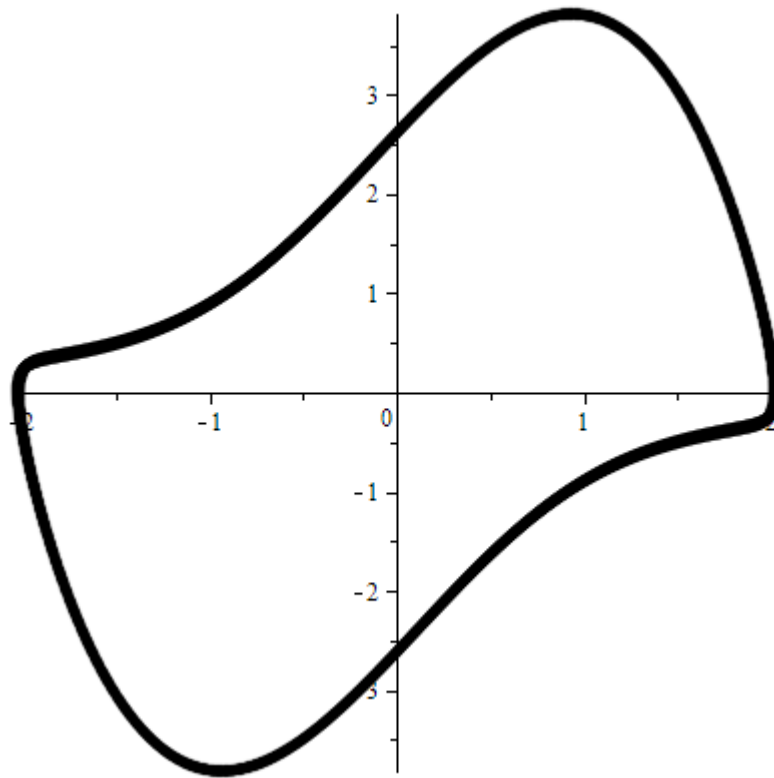


Рис. 1. Фазовий портрет.

### **Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження**

Використання візуального програмування в середовищі Maple для математичного моделювання реальних явищ та процесів має ряд переваг, порівняно з використанням інших мов програмування, як то C, Python та ін.

Більшість задач, пов'язаних з математичним моделюванням призводить до дослідження диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь, в тому числі і в частинних похідних. Maple має вже готові вбудовані функції для роботи з такими математичними об'єктами, і, що важливо, в символічному вигляді. Це значно полегшує роботу, особливо у випадку наявності точних аналітичних або наближених аналітичних розв'язків. При аналізі математичних моделей дуже часто доводиться використовувати якісні методи дослідження, пов'язані з візуалізацією отриманих числових або аналітичних даних. Система Maple має потужний інструментарій для створення та обробки візуальної інформації (побудова двомірної та тривимірної графіки тощо). Створення візуальних середовищ для дослідження математичних моделей дає можливість вивчати поведінку досліджуваного явища чи процесу для багатьох наборів вхідних

параметрів, що вирішується за допомогою створення мап летів, які по суті є користувацьким інтерфейсом при роботі з конкретними моделями.

#### Список використаної літератури

1. Hill D.C. Asymptotics and stability of the delayed Duffing equation / Hill D.C., Shafer. D.S. // Journal of differential equations, 2018. – No 256, Vol. 1. – P. 33-68
2. Kalita P. On multivalued Duffing equation / Kalita P., Kowalski P.M., // JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS, 2018. – No 462, Vol. 2. – P. 1130-1147
3. Крыжевич С.Г. Свойства решений уравнений типа Дуффинга с условиями удара / Крыжевич С.Г. // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2006. - №2. – С. 12 – 20.
4. Subber W. A parallel time integrator for noisy nonlinear oscillatory systems / Subber W., Sarkar A. // JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 2018. – No 362. – P. 190 – 207.
5. Demina M.V. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two-dimensional polynomial dynamical systems / Demina M.V. // PHYSICS LETTERS A, 2018. – No. 382, Vol. 20. – P. 1353-1360.
6. Niu J.C. Resonance Analysis of Fractional-Order Mathieu Oscillator / Niu J.C., Gutierrez H., Ren B. // JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND NONLINEAR DYNAMICS, 2018. – No 13, Vol. 5. P. 12-26.
7. Yu Y. Multistability and fast-slow analysis for van der Pol-Duffing oscillator with varying exponential delay feedback factor / Yu Y., Zhang Z.D., Bi Q.S // APPLIED MATHEMATICAL MODELLING, 2018. – No 57. – P. 448 – 458.
8. Fu H.X. Study on a Multi-Frequency Homotopy Analysis Method for Period-Doubling Solutions of Nonlinear Systems / Fu H.X., Qian Y.H. // INTERNATIONAL JOURNAL OF BIFURCATION AND CHAOS, 2018. – No28, Vol. 4. – P. 11 – 28.
9. Niy Y. Periodic Solutions of Sublinear Impulsive Differential Equations / Niy Y., Li X. // TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS, 2018. – No22, Vol. 2. – P. 439 – 452.
10. Vahidi A.R. An Improvement to the Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Duffing's Equations / Vahidi A.R., Babolian E., Azimzadeh Z. // BULLETIN OF THE MALAYSIAN MATHEMATICAL SCIENCES SOCIETY, 2018. – No41, Vol. 2. – P. 1105 – 1117.