УДК 681.325

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ В СУЧАСНІЙ НАУЦІ ТА ТЕХНІЦІ

Калюга Богдана, Задерей Надія

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук, доцент Задерей Н. М.

Національний технічний університет України «КПІ імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

Останнім часом математичний апарат вейвлет-аналізу набуває значного поширення в різних сферах науки, зокрема при розв'язанні практичних задач. Сформульована коротка історія виникнення та поступового розвитку теорії вейвлетів. Розглянуті основні властивості вейвлетів, принцип перетворення, надана класифікація вейвлет-функцій та коротка характеристика деяких таких функцій, вказано основні застосування вейвлет-перетворень, зокрема в сфері сучасної медицини, а також опис переваг і недоліків застосування вейвлет-аналізу.

Ключові слова: *вейвлет, вейвлет-перетворення, класифікація вейвлет-функцій, застосування в науці та техніці, аналіз результатів ЕКГ.*

Application of Wavelet Transform in Modern Science and Technics

B. Kaliuga, N. Zaderey

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Professor N. M. Zaderey

National Technical University «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

Recently, the mathematical apparatus of wavelet analysis has become widespread in various fields of science, in particular when solving practical problems. A brief history of the origin and gradual development of wavelet theory is formulated. The basic properties of wavelets, the principle of transformation, the classification of wavelet functions and a brief description of some such functions, the main applications of wavelet transformations, in particular in the field of modern medicine, and the advantages and disadvantages of using wavelet analysis are discussed.

Keywords: *wavelet, wavelet transform, classification of wavelet functions, applications in science and technology.*

Постановка проблеми. В математиці розглядається спеціальна функція – вейвлет, яка дозволяє аналізувати різні частотні компоненти даних. Графік функції виглядає як хвилеподібні коливання з амплітудою, що зменшується до нуля, віддаляючись далеко від початку координат.

Вейвлети – це сімейство функцій, які локальні в часі та по частоті, усі такі функції отримуються з однієї базової функції, яку змінюють за допомогою зсувів і розтягів по осі часу. Основна ідея вейвлетів полягає в аналізі заданого параметру відповідно до масштабу.

В даний час вейвлет-перетворення є одним з найбільш популярних тимчасових частот-перетворювань та одним з найбільш перспективних методів аналізу сигналів. [1,2]

В статті аналізується використання вейвлет-перетворень для обробки сигналів, цифрових зображень, ЕКГ, при аналізі ДНК та інших дослідженнях.

Аналіз досліджень і публікацій. Розробка вейвлетів почалася з роботи Альфреда Хаара на початку XX століття. Вагомий внесок в теорію вейвлетів зробили Гуппілауд, Гроссман і Морле, які сформулювали неперервне-вейвлет-перетворення (НВП) (1982). З початком активного розвитку цієї відносно молодої галузі математики вченими були досліджені такі напрямки: дискретні вейвлети (Жан Олаф-Стромберг, 1983), ортогональні вейвлети з компактним носієм (Інгрід Добеші, 1988), тимчасово-частотна інтерпретація (Наталі Департ, 1989), гармонійне вейвлет-перетворення (Ньюланд) і багато інших.

В кінці XX століття з’являються інструментальні засоби по вейвлетам в системах комп’ютерної математики: Mathcad, MATLAB, Mathematica. Створені інтегральні мікросхеми для вейвлет-обробки сигналів [3].

В грудні 2000 року був створений новий міжнародний стандарт стиску зображень JPEG 2000, в якому стиск здійснюється за допомогою розкладу зображення за базисом вейвлетів [2].

В 2002-2003 роках з’явився ICER – формат стиску зображень на основі вейвлет-перетворень, що використовується для передачі зображень у далекому космосі, зокрема у місіях NASA по дослідженню планети Марс.

Мета статті – ознайомитися з основними можливостями вейвлет-перетворень та їх застосуваннями. Розглянути ефективність застосувань вейвлетів, переваги та недоліки використання вейвлет-перетворень.

Виклад основного матеріалу. У загальному випадку аналіз сигналів проводиться в площині вейвлет-коефіцієнтів (масштаб – час – рівень). Вейвлет-коефіцієнти визначаються інтегральним перетворенням сигналу. Отримані вейвлет-спектрограми принципово відрізняються від звичайних спектрів Фур’є тим, що дають чітку прив'язку спектра різних особливостей сигналів на часі. На відміну від віконного перетворення Фур’є, вейвлет-перетворенню властива змінна розрізняльна здатність залежно від часу і частоти. При високих частотах вейвлет-перетворення забезпечує високу розрізняльну здатність по часу і низьку по частоті, при низьких частотах – навпаки, високу розрізняльну здатність по частоті і низьку по часу. [2]

Основні ознаки, якими має володіти функція $\psi(t)$, щоб стати вейвлетом:

• Локалізація, тобто вейвлет повинен бути неперервним, інтегровним, мати компактний носій і бути локалізованим як в часі (в просторі), так і по частоті.

• Нульове середнє значення, а саме повинні виконуватись умови для нульового моменту:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$$

• Обмеженість, квадрат норми функції має бути скінченим:

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\psi(t)\right|^2 dt < \infty$$

• Автомодельність базису: форма конкретної сім'ї вейвлетів $\psi_{ab}(t)$, отриманих за допомогою масштабування a та зсувів b, повинна бути подібною до материнського вейвлету $\psi(t)$, тобто мати одне і те ж число осциляцій. [3]

Вейвлет-перетворення – це інтегральне перетворення, яке являє собою

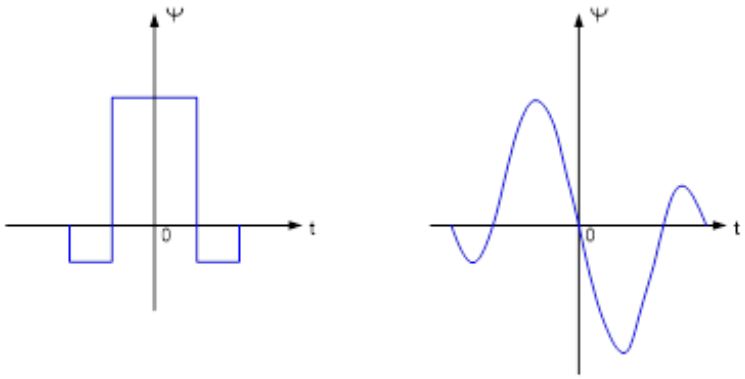

Рис. 1 Вейвлет Майера

згортку вейвлет-функції з сигналом. Перетворення переводить сигнал з тимчасового способу зображення в частотно-тимчасове [рис 1]. Основна ідея вейвлет-перетворень полягає в можливості дозволити зміни в продовженні часу, але не у формі.

Для здійснення вейвлет-перетворення вейвлет-функція $\psi(t)$ повинна:

• мати скінчену енергію:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(t))^2 dt < \infty$$

• має виконуватися умова:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{\vartheta(f)^2}{f} df < \infty,$$

де $\vartheta(f)$ – Фур'є-перетворення для вейвлета $\psi(t)$.

Наведемо класифікацію вейвлетів за родинами [5]:

Таблиця 1.

Класифікація за родинами

Грубі	Ортогональні	Біортогональні
• Морле • Мексиканська шляпа • Гауса	• Хаара • Добеші	• Біортогональні • Зворотньобіортогональні

Вейвлет Хаара використовується для стиснення вхідних сигналів, компресії зображення, в основному кольорового та чорно-білого з плавними переходами [рис 2].

Вейвлет Морле – $\psi(t) = \left(e^{i\omega t}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}$ використовується для задач, що потребують кращого спектрального розв'язку [рис. 3].

Вейвлет Мексиканська шляпа – $\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ використовується для задач, що потребують гарного просторового вирішення і не потребують спектрального розв'язку [рис. 4].

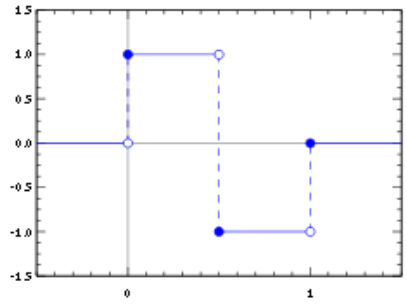

Рис. 2. Вейвлет Хаара

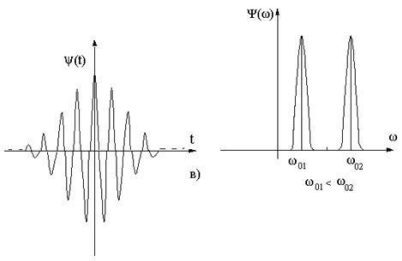

Рис. 3 І

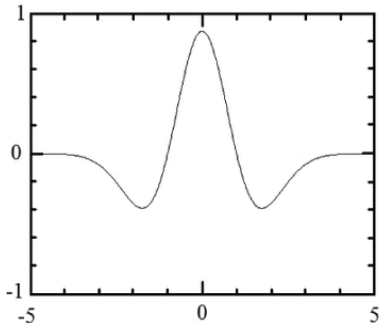

Рис. 4. Вейвлет «мексиканська шляпа»

Також поширеними є вейвлет Мейера, вейвлет Пауля, вейвлет Р. Койфмана, вейвлет Шеннона та інші [5, 7].

Застосування вейвлет-перетворень досить широке. Вейвлет-перетворення використовуються для обробки сигналів, нерідко замінюючи звичайне перетворення Фур’є в багатьох областях фізики, включаючи молекулярну динаміку, астрофізику, сейсмічну геофізику, оптику, турбулентність, квантову механіку, обробку зображень, ЕКГ, аналіз ДНК, дослідження білків, загальну обробку сигналів, при розпізнаванні мови, у комп’ютерній графіці, мультифрактальному аналізі.

Дане перетворення також використовується для кодування сигналів, для аналізу сигналів в інженерній справі і комп’ютерних науках, у наукових дослідженнях фізичних процесів.

Вейвлет-перетворення в наш час взяті на озброєння для величезної кількості різнопланових застосувань, нерідко заміняючи звичайне перетворення Фур'є у багатьох прикладних задачах. [7, 8]

Наприклад, при медичній діагностиці для виявлення значущих діагностичних ознак і для стискання зображень з найменшими втратами інформації, потрібної для діагнозу, вейвлет-перетворення більш досконалі, порівняно з перетворенням Фур’є через можливість отримати залежність амплітуди від частоти і часу. Метою нових високоефективних методів аналізу медичних сигналів є автоматичне встановлення правильного діагнозу при відсутності лікаря чи недостатній його кваліфікації, що підвищує ймовірність діагностування захворювань на ранніх стадіях.

Нижче наведено застосування вейвлетів до аналізу результатів ЕКГ [рис 5]. Коефіцієнти неперервного вейвлет-перетворення містять інформацію про енергію окремих компонент ЕКГ сигналу і про час їх появи. Це дозволяє одночасно досліджувати повільну і швидку динаміку змін кардіосигналу у часі, а також виявляти такі локальні особливості як наявність ППП – пізніх потенціалів передсердь. [6, 8]

Широко застосовується вейвлет-аналіз до дослідження електрокардіограми плоду з абдомінальних сигналів матері. Електрокардіографічний метод дозволяє розмістивши електроди на животі вагітної жінки, зареєструвати абдомінальний електрокардіографічний сигнал, що представляє собою суміш електрокардіограм матері та плоду. Для подальшого аналізу стану плоду необхідно за допомогою цифрових методів обробки ЕКГ сигналів відокремити фетальну електрокардіограму [6].

Аналіз абдомінальної ЕКГ передбачає попередню обробку сигналу з метою усунення шумових складових і виділення ЕКГ плоду для подальшого визначення діагностичних параметрів. Дискретний вейвлет-розклад є методом, що дозволяє провести як усунення шумів, так і очищення абдомінального сигналу від головної високоамплітудної перешкоди ─ ЕКГ матері. Сигнал абдомінальної ЕКГ за допомогою дискретного вейвлет-розкладу представляється у вигляді суми апроксимуючої складової та деталізуючих складових [рис 6].

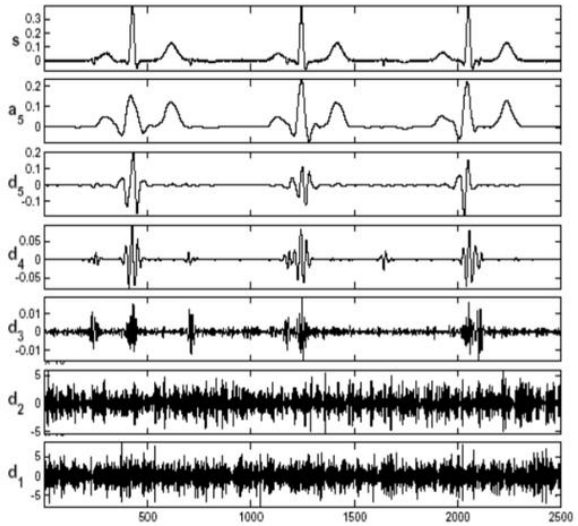

Рис. 5. Аналіз ЕКГ за допомогою НВП

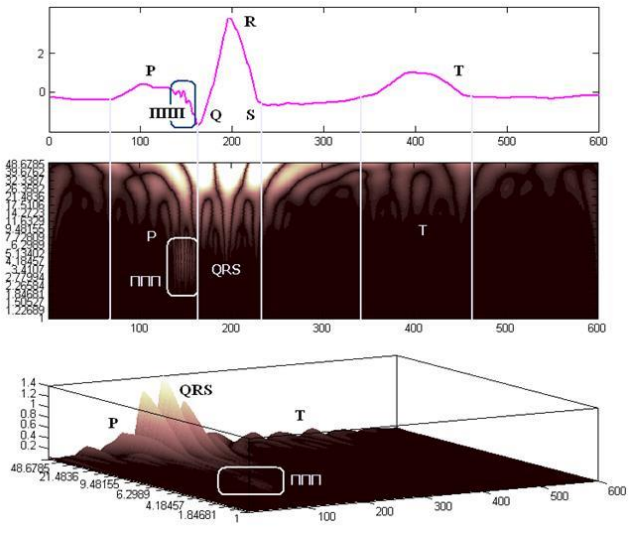

Рис. 6. Вейвлет-розклад моделі ЕКГ

Переваги та недоліки:

• При виділенні в сигналах добре локалізованих різномасштабних процесів можна розглядати тільки ті масштабні рівні розкладання, які виявляють зацікавленність.

• Вейвлетні базиси, на відміну від перетворення Фур'є мають досить багато різноманітних базових функцій, властивості яких орієнтовані на вирішення різних завдань.

• Базисні вейвлети можуть мати кінцеві і нескінченні носії, що реалізуються функціями різної гладкості.

• Недоліком вейвлетного перетворень є їх відносна складність.

Висновки. Створення нової системи функцій «вейвлетів» здійснило справжню революцію в теорії обробки та збереження сигналів, дозволяючи стискати інформацію в 100 -150 разів без суттєвої втрати якості. Це і є головним призначенням та досягненням використання вейвлет -перетворень.

Список літератури

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: РХД, 2001.
2. Протасов В. Ю. Обработка сигналов: от волн к всплескам // Електр. ресурс http://book.etudes.ru/toc/wavelets/
3. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2014. – 628 с.
4. http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_spec/270/MM_lec8.pdf
5. Ситніков В. С., Біленко А. О. Класифікація вейвлет-функцій. // Тр. Одеськ. політехн. ун.-ту – Одеса, 2008. – Вип. 1(29). – с.158-161. http://www.pratsi.opu.ua/app/webroot/articles/1312654773.pdf
6. Н. Г. Іванушкіна, К. О. Іванько. Цифрова обробка низькоамплітудних компонент електрокардіосигналів: Навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 182 с.
7. Капшій О. В., Коваль О. І., Русин Б. П. Вейвлет-перетворення у компресії та попередній обробці зображень. – НАНУ, Фіз.-мех. ін.-т ім. Г. В. Карпенка.– Львів: Сполом, 2008.– 208 с.

8. Волошин Ю. А., Куліш С.Н., Олійник В.П. Шляхи підвищення інформативності аналізу біоелектричних сигналів // Радіотехніка. – 2019. –Вип. 196. –с.98–105 http://nbuv.gov.ua/UJRN/