

УДК 004.03

РОЗРОБКА ДОДАТКУ ДЛЯ АНАЛІЗУ ДИСПЕРСІЙНОГО СПІВВІДНОШЕННЯ ЗАСОБАМИ MAPLE

Літвінов Владислав

Науковий керівник: канд. пед. наук Лупан І.В.

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

Стаття присвячена створенню графічного додатку для дослідження дисперсійного співвідношення в тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном - шар – шар з вільною поверхнею». Наведена постановка задачі в першому наближенні. Представлені розв'язки першого наближення та дисперсійне співвідношення. Графічно проілюстровані результати аналізу коренів дисперсійного рівняння.

Ключові слова: Maple, маплет, дисперсійне співвідношення.

DEVELOPMENT OF MAPLET IN MAPLE FOR ANALYSIS OF DISPERSHIONAL RELATION

Litvinov Vladyslav

Scientific supervisor: I.V. Lupan, PhD

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,
Kropyvnytskyi, Ukraine*

The article is devoted to creating graphical applications in the Maple environment for investigation of dispertional relationy in three-layer system “solid bottom layer – layer - layer with a free surface”. The formulation of the problem in the first approximation is given. First approximation and variance ratios are presented. The results of the analysis of the roots of the dispersion equation are graphically illustrated.

Keywords: Maple, maplet, dispertional relation.

Постановка проблеми. Майже будь-яка область науки або техніки пов'язана з хвильовими рухами. Велике практичне значення мають дослідження поведінки хвиль у системах різного типу стратифікації за густиною.

Дослідження особливостей моделей таких систем потребує знання складного математичного апарату, громіздких аналітичних перетворень,

тривалих чисельних обчислень та використання спеціальних математичних пакетів.

Таким чином, актуальним є дослідження та аналіз проблеми про поширення внутрішніх та поверхневих хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – рідкий шар – шар з вільною поверхнею» із застосуванням методу багатомасштабних розвинень з врахуванням сили поверхневого натягу на вільній поверхні та на поверхнях контакту.

Аналіз досліджень і публікацій.

У роботі [1] досліджуються умови розповсюдження хвиль в двошаровій рідині з вільною поверхнею. Авторами проаналізовано корені дисперсійного рівняння для проблеми розповсюдження хвилі в двошаровій рідині кінцевої глибини з вільною поверхнею для різних значень співвідношення щільностей. Показано, що корені, отримані в граничних випадках, добре узгоджуються з раніше відомими результатами. Доведено існування двох лінійно-незалежних розв'язків задачі в першому наближенні.

У роботі [2] досліджується енергія руху хвиль в двошаровій гідродинамічній системі - «шар з твердим дном - шар з вільною поверхнею». Проаналізовано залежності енергій руху внутрішніх і поверхневих хвиль від геометричних і фізичних параметрів системи. Оцінюється внесок другого наближення в повну енергію системи. Перевіряється надійність отриманих результатів. Результати графічно проілюстровані.

У роботі [3] експериментально досліджуються міжфазові внутрішні хвилі в стратифікованій рідині, спричинені періодичними збуреннями вільної поверхні у закритому резервуарі. Досліджено зв'язок між горизонтальними поверхневими швидкостями та внутрішніми хвильовими амплітудами, якісно описуються схеми розвитку потоку, а хвильові швидкості внутрішніх хвиль систематично аналізуються і порівнюються з лінійними 2- і 3-шаровими теоріями. Виявлено, що, незважаючи на те, що спостережувані внутрішні хвилі можуть мати значні амплітуди, лінійне 3-шарове наближення все ж досить добре узгоджене з експериментальними результатами.

У [4] досліджується взаємодія північно-атлантичних бароклінних хвильових пакетів і середземноморської бурі. Результати дослідження показують, що основне джерело енергії для розвитку циклонів обумовлений зниженням потоку через існуючі висхідні збурення. Цей процес пов'язаний з поширенням когерентних хвильових пакетів, що зв'язують зиму в Північній Атлантиці і Середземному морі. Представлені два спеціально відібраних випадки: один з явним поширенням хвильового пакета в Середземноморський регіон від північноатлантичного штормового шляху, а інший з зональним поширенням хвильових пакетів вздовж центральної широти північноатлантичного штормового шляху. Показано, що ці два випадки надають явний вплив на горизонтальний потік хвильової активності через область, що оточують Середземну штормову доріжку.

У [5] вивчається поведінка слабо нелінійних океанічних внутрішніх хвиль при наявності фонового обертання і зсувного потоку, коли два окремих лінійних довгохвильових режими мають майже однакові фазові швидкості. Хвилі описуються системою пов'язаних рівнянь Островського, отриманих з повного набору рівнянь Ейлера для нестискуючої густини стратифікованої рідини з вільною поверхнею та жорсткими нижніми граничними умовами.

У [6] вивчаються хвилі на границі двох тонких горизонтальних шарів рідин, що не змішуються, схильних до високочастотних горизонтальних коливань. У цій роботі виводяться еволюційні рівняння для довгих хвиль в системі, які виявляються ідентичними до рівняння Буссінеска. Показано, що залежно від початкових збурень нестійкі солітони або ростуть вибуховим чином, що означає розрив шару за кінцевий час, або розкладаються на стабільні солітони. Результати отримані в довгохвильовому наближенні як аналіз лінійної стійкості для стану плоскої поверхні.

У роботі [7] розглядається взаємодія внутрішніх та поверхневих хвиль у двошаровій рідині з вільною поверхнею. Досліджено амплітуди другої гармоніки висот поверхні контакту та вільної поверхні для двох пар частот центру хвильового пакету. Показано, що хвильовий гребінь рухається швидше,

ніж основа, і руйнується, тоді як воно стає гладким через розсіювання. Ефект визначається впливом нелінійності та дисперсії на поширення внутрішніх і поверхневих хвиль.

У роботі [8] проблема поширення внутрішніх і поверхневих хвиль у гідродинамічній системі "шар з жорстким дном – шар з вільною поверхнею" з урахуванням вітрових хвиль досліджена методом чисельного моделювання.

У роботі [9] автори досліджують взаємодію малих внутрішніх хвильових пакетів з великомасштабною внутрішньою одиночною хвилею за допомогою прямого чисельного моделювання високої роздільної здатності в двох вимірах. Ключовим висновком дослідження є той факт, що для хвильових пакетів, складові хвилі яких короткі в порівнянні з одиночною шириною хвилі, взаємодія призводить до майже повного руйнування коротких хвиль.

Мета статті: створити комп'ютерну програму, яка дає можливість аналізувати дисперсійне співвідношення для різних геометричних та фізичних параметрів системи.

Виклад основного матеріалу.

Досліджується задача про поширення тривимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 , рідкого шару над ним $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 та верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 . Шари Ω_1 і Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x, t)$, шари Ω_2 і Ω_3 розділені поверхнею контакту $z = \eta_2(x, t)$, а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею $z = \eta_3(x, t)$. При розв'язанні враховується сили поверхневих натягів на поверхнях контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку. Математична постановка задачі в лінійному випадку має вигляд:

$$\varphi_{j1, x_0 x_0} + \varphi_{j1, z z} = 0 \quad \text{у } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\eta_{11, t_0} - \varphi_{j1, z} = 0 \quad \text{на } z = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\begin{aligned}
\eta_{21,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z = h_2, j = 2,3 \\
\eta_{31,t_0} - \varphi_{31,z} &= 0 \text{ на } z = h_2 + h_3 \\
\varphi_{11,t_0} - \rho_2 \varphi_{21,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_1 - T_1 \eta_{1,x_0 x_0} &= 0 \text{ на } z = 0 \\
\rho_2 \varphi_{21,t_0} - \rho_3 \varphi_{31,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_2 - T_2 \eta_{2,x_0 x_0} &= 0 \text{ на } z = h_2 \\
\rho_3 \varphi_{31,t_0} + \rho_3 \eta_3 - T_3 \eta_{3,x_0 x_0} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3 \\
\varphi_{11,z} &= 0 \text{ на } z = -h_1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Розв'язок задачі першого порядку (1) одержано у вигляді хвиль, що біжать

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= -\frac{i\omega A}{k \operatorname{sh}(kh_1)} \operatorname{ch}(k(z + h_1)) e^{i\theta} \\
\eta_{11} &= A e^{i\theta} \\
\varphi_{21} &= -\frac{iA}{\rho_2 \omega k} \left[(\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - (1 - \rho_2)k - T_1 k^3) \operatorname{ch}(kz) + \omega^2 \rho_2 \operatorname{sh}(kz) \right] e^{i\theta} \\
\eta_{21} &= -\frac{A}{\rho_2 \omega^2} \left[(\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - (1 - \rho_2)k - T_1 k^3) \operatorname{sh}(kh_2) + \omega^2 \rho_2 \operatorname{ch}(kh_2) \right] e^{i\theta} \\
\varphi_{31} &= -\frac{iA}{\rho_2 \rho_3 \omega^3 k} \left[(\rho_2 \omega^2 S - F((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3)) \operatorname{ch}(k(z - h_1)) + F \omega^2 \rho_3 \operatorname{sh}(k(z - h_2)) \right] e^{i\theta} \\
\eta_{31} &= -\frac{A}{\rho_2 \rho_3 \omega^4} \left[(\rho_2 \omega^2 S - F((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3)) \operatorname{sh}(kh_3) + F \omega^2 \rho_3 \operatorname{ch}(kh_3) \right] e^{i\theta}
\end{aligned}$$

де,

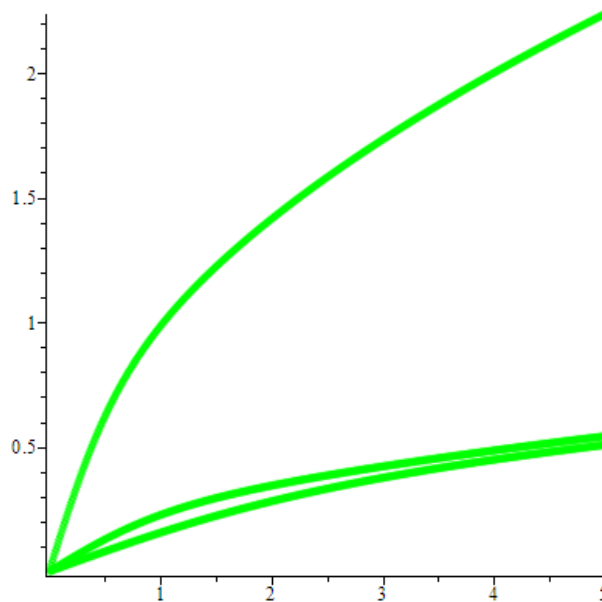
$$\begin{aligned}
F &= (\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - (1 - \rho_2)k - T_1 k^3) \operatorname{sh}(kh_2) + \omega^2 \rho_2 \operatorname{ch}(kh_2) \\
S &= (\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - (1 - \rho_2)k - T_1 k^3) \operatorname{ch}(kh_2) + \omega^2 \rho_2 \operatorname{sh}(kh_2)
\end{aligned} \tag{2}$$

Підставляючи розв'язки (2) у динамічну умову на вільній поверхні задачі першого наближення (1), отримуємо дисперсійне рівняння

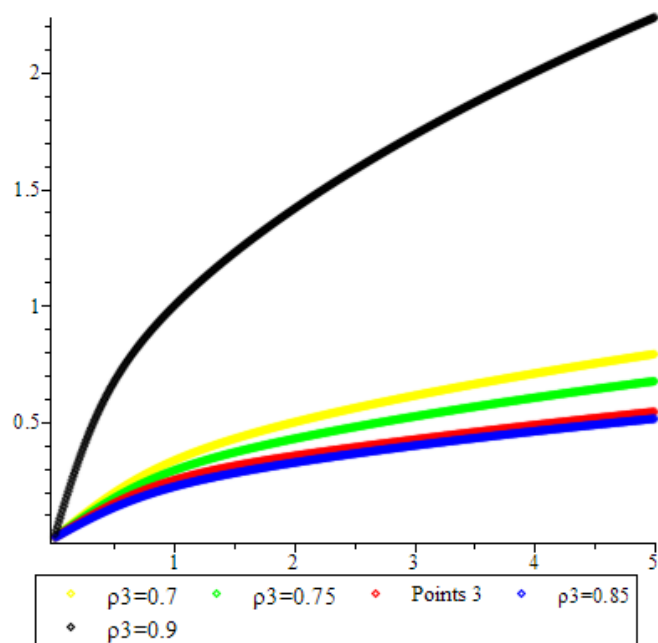
$$-a\omega^6 + b\omega^4 - c\omega^2 + d = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
a &= \rho_3 (\rho_2 \operatorname{cth}(kh_3) (\operatorname{cth}(kh_1) \operatorname{cth}(kh_2) + \rho_2) + \rho_3 (\operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2))) \\
b &= (\rho_3 (((1 - \rho_2)k + T_1 k^3) (\rho_2 \operatorname{cth}(kh_3) \operatorname{cth}(kh_2) + \rho_3) + (\operatorname{cth}(kh_1) + \\
&+ \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2))) ((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3) \operatorname{cth}(kh_3)) + (\rho_3 k + T_3 k^3) (\rho_2 (\operatorname{cth}(kh_1) \operatorname{cth}(kh_2) + \\
&+ \rho_2) + \rho_3 \operatorname{cth}(kh_3) (\operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)))) \\
c &= (\rho_3 ((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3) \operatorname{cth}(kh_3) ((1 - \rho_2)k + T_1 k^3) + \\
&+ (\rho_3 k + T_3 k^3) (((1 - \rho_2)k + T_1 k^3) (\rho_2 \operatorname{cth}(kh_2) + \rho_3 \operatorname{cth}(kh_3)) + \\
&+ ((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3) (\operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)))) \\
d &= (\rho_3 k + T_3 k^3) ((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3) ((1 - \rho_2)k + T_1 k^3)
\end{aligned}$$

В такого типу задач вперше виникло дисперсійне рівняння 6-го порядку по степені частоти. Знайти формули для коренів дисперсійного рівняння в замкнутому аналітичному вигляді не вдалося, тому було реалізовано мап лет для аналізу коренів дисперсійного рівняння (3) засобами Maple, з використанням чисельних методів. На рисунках нижче показані дисперсійні діаграми, отримані з використанням створеного ПО.



Мал.1. Дисперсійні діаграми.



Мал. 3. Дисперсійні діаграми для різних значень густини верхнього шару
 Нижче представлено код однієї з процедур для побудови дисперсійних
 діаграм.

```

W14 := matrix(500, 2, [ ]) : W24 := matrix(500, 2, [ ]) : W34
:= matrix(500, 2, [ ]) : i := 1 :

for kk from 0.01 by 0.01 to 5 do
W14[i, 1] := kk :
W14[i, 2] := solve(evalf(disp(kk, rr2, rr3, TT1, TT2, TT3, hh1, hh2,
hh3)) = 0, omega)[1] :
W24[i, 1] := kk :
W24[i, 2] := solve(evalf(disp(kk, rr2, rr3, TT1, TT2, TT3, hh1, hh2,
hh3)) = 0, omega)[2] :
W34[i, 1] := kk :
W34[i, 2] := solve(evalf(disp(kk, rr2, rr3, TT1, TT2, TT3, hh1, hh2,
hh3)) = 0, omega)[3] :
i := i + 1 :
end do:

```

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження

Використання візуального програмування в середовищі Maple для математичного моделювання реальних явищ та процесів має ряд переваг, порівняно з використанням інших мов програмування, як то C, Python та ін.

Більшість задач, пов'язаних з математичним моделюванням призводить до дослідження диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь, в тому числі і в частинних похідних. Maple має вже готові вбудовані функції для роботи з такими математичними об'єктами, і, що важливо, в символічному вигляді. Це

значно полегшує роботу, особливо у випадку наявності точних аналітичних або наближених аналітичних розв'язків. При аналізі математичних моделей дуже часто доводиться використовувати якісні методи дослідження, пов'язані з візуалізацією отриманих числових або аналітичних даних. Система Maple має потужний інструментарій для створення та обробки візуальної інформації (побудова двомірної та тривимірної графіки тощо). Створення візуальних середовищ для дослідження математичних моделей дає можливість вивчати поведінку досліджуваного явища чи процесу для багатьох наборів вхідних параметрів, що вирішується за допомогою створення мап летів, які по суті є користувацьким інтерфейсом при роботі з конкретними моделями.

Список використаної літератури

1. Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Conditions of Wave Propagation in a Two-Layer Liquid with Free Surface // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – 1, Vol. 212, Iss 2, - P. 131–141.
2. Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. - Vol. 229, Iss3, - P. 241–252.
3. Vincze M., Bozoki T. Experiments on barotropic-baroclinic conversion and the applicability of linear n-layer internal wave theories // Cornell university library Physics. Fluid Dynamics. – 2017. – 2.
4. Ahmadi-Givi F., Nasr-Esfahany M., Mohebalhojeh A. R. Interaction of North Atlantic baroclinic wave packets and the Mediterranean storm track // Quarterly journal of the royal meteorological society. – 2014. - Vol. 140, Iss. 680. - P. 754-765.
5. Alias A., Grimshaw R.H.J., Khusnutdinov K.R. Coupled Ostrovsky Equations for Internal Waves, with a Background Shear Flow // Procedia IUTAM. –2018. - Vol. 11 – P. 3-14.
6. Goldobin D. S., Pimenova A. V., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Running interfacial waves in a two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // Physical review journals. – 2015. - Vol. 91, Iss. 5.
7. Avramenko O.V., Naradovy V.V. Multiscale approximation of surface and internal waves interaction in two-layer fluid // Contemporary problems of natural sciences. – 2014. - Vol.1 (1) – P. 13-17.

8. Naradovy V., Avramenko O. Simulation of surface and internal wave-packets and wind waves in two-layered fluid // Naukovy zapysky. Series: Mathematical Sciences – 2016. – Vol. 74 – P. 62 – 66.
9. Xu CZ., Stastna M. On the interaction of short linear internal waves with internal solitary waves // Nonlinear processes in geophysics. – 2018. - Vol. 25, Iss. 1. - P. 1–17.