УДК 373.5.016:512

МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ СКІНЧЕНИХ СУМ

Смолік Тетяна

Науковий керівник: кандидат педагогічних наук, доцент Войналович Н.М.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розглядається навчальний матеріал з проблеми дослідження, на конкретних прикладах проілюстровано, як можна знаходити скінченні суми різними методами; на достатньому рівні досліджено сучасний стан проблеми в методичній літературі і шкільній практиці; обґрунтовано запровадження і реалізація нових результатів у освітньому процесі загальноосвітніх навчальних закладах.

Ключові слова: *скінчені суми, послідовність, квазімногочлен.*

Methods of finding the amounts

T. Smolyk

Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Docent Voynalovich N.M.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The study offered scientific material on research issues, specifically offering illustrated how equal substantive methods can be followed; Considering that they have explored the contemporary problems of the problem in methodical literature and school practice; it is reasonable to invite and realize new results in the use of this time conscious educational educational declarations.

Keywords*: amounts made, ability, quasi-polynomial.*

Постановка проблеми. В останні десятиріччя особливо актуальними стали об’єкти і методи дискретної математики, що пов’язано з можливістю застосування ЕОМ в цій сфері наукової діяльності. Замінивши визначений інтеграл скінченними сумами, а диференціальні рівняння – різницевими, людина перейшла від банальних і екологічно небезпечних випробувань новітніх технологій до їх комп’ютерного моделювання з наступним аналізом можливих наслідків в суспільстві та природі, зберігши при цьому засоби математики основними в природознавстві.

Означена тема є актуальною, тому, що досить цікава як для студентів, під час вивчення її у курсі «Різницеве числення» з наголосом на розширення поняття про послідовність і т.п.; так і для школярів, адже застосування цих понять можливе до розв’язування задач з алгебри та геометрії упродовж всього шкільного курсу математики.

В шкільній математиці розглядаються питання про знаходження сум арифметичної та геометричної прогресій. Існує цілий ряд методів для знаходження сум.

Аналіз досліджень і публікацій: *поляга*є у можливості застосування різноманітного математичного апарату для знаходження сум.

Мета статті: полягає в обґрунтуванні ефективності застосування методів знаходження сум при розв'язувані прикладів, застосування в шкільному курсі математики.

Об’єктом дослідження виступає процес навчання обраної теми учнів класів з поглибленим вивченням математики, розділи математики “Різницеве числення”, “Конкретна математика”.

Предметом дослідження є методична система навчання теми в класах з поглибленим вивченням математики.

Виходячи з мети і гіпотези, перед дослідженням були поставлені *завдання:*

- визначити основні науково-теоретичні відомості про методи знаходження;
- застосувати теорію даного дослідження на прикладах.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. У даній статті розглянуті деякі методи знаходження сум вигляду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = f(x) + (x+1) + \dots f(x+n-1)$$

Теорема 1. *(Про підсумовування).* Якщо Δ^{-1}f(x)= F(x), то

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = F(x+n) - F(x) \tag{1}$$

Доведення. Через те, що

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = f(x)$$
$$\Delta F(x+1) = F(x+2) - F(x+1) = F(x+1),$$
$$\Delta F(x+1) = F(x+3) - F(x+2) = F(x+2),$$
$$\ldots$$

то, складаючи відповідні частини цих рівностей, отримаємо (1).

Формула (1) є аналогом формули Лейбніца-Ньютона[2] в інтегральному численні, тому як і там, формулу (1) зручно використовувати в такому вигляді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = F(x+k)\,|_0^n = F(x+n) - F(x) \tag{2}$$

На практиці часто використовується частинний випадок формули (2), для $x = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = F(k)\,|_0^n = F(n) - F(0) \tag{3}$$

Розглядаючи основні властивості скінченних сум, ми дійшли до висновку про їх ефективне застосування при розв'язуванні певного класу задач [1]. Легко помітити, що в кожному прикладі використовується прийом перегрупування членів із подальшим вивченням поведінки відповідних сум. Цей прийом покладено в основу одного з методів підсумовування – метода ведення. Розглянемо його.

Позначимо

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{4}$$

Розглянемо $S_n + a_{n+1}$

$$S_n = a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n+1} a_k \overset{k \to k+1}{=} a_0 + \sum_{k=0}^{a} a_{k+1}$$

Отже,

$$S_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_{n+1}$$

Сума $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$, зазначена в останній рівності, дуже схожа на S_n.

Тепер якщо вдається, використовуючи властивості сум иожемо виразити $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$ через S_n то, звівши подібні доданки, отримуємо замкнений вираз для шуканої суми.

Приклад 1. *Знайти суму квадратів перших n натуральних чисел.*

Позначимо через $S_{n=} \sum_{k=0}^{n} k^3$ і розглянемо $S_n + (n+1)^3$.

$$S_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) \overset{в.л.1,2}{=} S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 =$$
$$= S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Отримали $S_n + (n+1)^3 = S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

Звідси $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Приклад 2. З*найти* $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$

Функція $f(x) = x \cdot 2^x$ - квазімногочлен [3]. Під квазімногочленами в математиці прийнято вважати функції, що є лінійними комбінаціями добутків многочленів на показникові функції.

Виділення квазімногочлена в окрему математичну структуру обумовлено кількома причинами, серед яких виділимо можливість опису за допомогою них реальних фізичних, хімічних та біологічних процесів. Тому часто приходиться мати справу із сумами, що містять квазімногочлени.

Слідуючи загальній схемі методу зведення, запишемо:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 2S_n + \frac{2^{n+2}-2}{2-1} + 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

Отже, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$

Пригадайте як у школі вчитель малював таблицю:

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$,

з якої напрошувався наступний результат: 1+ 3 + 5 +...+ (2n -1)= n2 . Потім, користуючись методом математичної індукції, доводилося, що дійсно, сума перших n непарних чисел рівна квадрату їх кількості.

І дійсно, в багатьох випадках вдається простежити залежність значення суми від кількості

Приклад 3. *Обчислити суму* $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$, *де* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

Випишемо кілька перших значень шуканої суми.

$1 \cdot 1! = 1$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$

Легко помітити, що $1 = 2! - 1,\ 5 = 3! - 1,\quad 23 = 4! - 1,\ 119 = 5! - 1,$ звідки виникає наступне припущення: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1) - 1$

Провівши доведення методом математичної індукції, переконуємося в правильності отриманого результату.

Ми не можемо дати жодних порад щодо того як “відчути істину”; інколи це вдається зробити формалізувавши певні перетворення та властивості, інколи – пробивши деяку кількість дослідів вбачають закономірність, але, не зважаючи на це, *довести існуючий результат часто важливіше, ніж відшукати його*.

Приклад 4. Знайти $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$

Функція $f(x) = x \cdot 2^x$ - квазімногочлен. Під квазімногочленами в математиці прийнято вважати функції, що є лінійними комбінаціями добутків многочленів на показникові функції [4]. Виділення квазімногочлена в окрему математичну структуру обумовлено кількома причинами, серед яких виділимо можливість опису за допомогою них реальних фізичних, хімічних та біологічних процесів. Тому часто приходиться мати справу із сумами, що містять квазімногочлени. Слідуючи загальній схемі методу зведення, запишемо:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k + \frac{2^{n+2} - 2}{2-1} =$$

$$= 2S_n + 2^{n+2} - 2.$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

Приклад 5. Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Доведення приведемо методом математичної індукції. За базис індукції беремо n=1. При рівність виконується. Дійсно, $\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$.

Припустимо, що при $n = m$ $\sum_{k=1}^{m} \sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (*)

Доведемо, що при $n=m+1$ $\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\frac{(m+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

(**)

Розглянемо

$$\sum_{k=1}^{m} \sin k\alpha \overset{вл2,4}{=} \sum_{k=1}^{m} \sin k\alpha + \sin(m+1)\alpha \overset{(**)}{=} \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin(m+1)\alpha =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2} + \sin\frac{m\alpha}{2}\sin(m+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\left(\sin\frac{m\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(m+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{m\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\alpha + \cos\frac{m\alpha}{2}\sin\alpha\right) = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\frac{(m+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Отже, рівність (*) виконується для довільного натурального n.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Розглянуті приклади показують знаходження скінчених сум. Використання певних методів може стати зручним інструментом на уроках математики в школі, при підготовці олімпіадних завдань вчителем, а також може стати темою окремого факультативного заняття, що виступить прекрасною пропедевтикою до вивчення інтегрального числення.

Список використаної літератури

1. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 120 с.

2. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник, 2000. – 174 с.

3. Вышенский В.А. и др. Сборник задач киевских математических олимпиад. – К.: Выща школа, 1984. – 240 с.

4. Бекишев Г.А., Кратко М.І. Підсумовування послідовностей. – К.: Вища школа, Головне видавництво, 1981.