УДК 371.512

УЗАГАЛЬНЕННЯ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Мишко Єгор

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті висвітлюються результати огляду методичних прийомів узагальнення функціональної лінії вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем в старшій школі. Метод узагальнення передбачає виділення головного – провідних положень, понять, методів та ідей. Саме на реалізацію цих функцій і спрямовані спеціальні уроки узагальнення, які проводяться після закінчення вивчення теми, розділу, курсу. Зокрема результатом є висновок про узагальнення методу інтервалів для нерівностей різних типів.

Ключові слова: *рівняння, пропедевтика, рівність зі змінною, метод інтервалів, нерівність, функція, область допустимих значень.*

Generalization of study of equations, inequalities and their systems in the school mathematics

Ye. Myshko

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

The article deals with the results of a review of methodological techniques for generalizing the functional line of studying equations, inequalities and their systems in high school. The function of generalization involves the selection of the main – leading positions, concepts, methods and ideas. It is on the implementation of these functions and directed special lessons of generalization, which are held after the study of the topic, section, and course. In particular, the result is a conclusion on the generalization of the interval method for inequalities of different types.

Keywords: *equation, propaedeutic, equality with variable, interval method, inequality, function, range of admissible values.*

Постановка проблеми. Рівняння – центральне поняття математики. У шкільному курсі математики рівняння слугують для задання функцій, геометричних фігур, для розв’язування текстових завдань. Поняття рівняння в ШКМ не визначається, а вводиться пояснювальним описом в пропедевтичному курсі математики як рівність зі змінною або як рівність з невідомим, так і в систематичному курсі алгебри. За допомогою уроку узагальнення можна встановити ті зв'язки і відносини між елементами знань, які не були розкриті.

Аналіз досліджень і публікацій. Проблема вивчення змістових ліній у шкільному курсі широко обговорюється в науковій літературі. Рівняння, нерівності та їх системи вивчали такі науковці, як В.О. Гришина, О.Б. Папковська , Л.М. Васіліу [1], рівняння та їх системи розглядали з точки зору інноваційних інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк [2]. Методичні вказівки докладно описані в посібниках П.Б. Талочки та А.Н. Бекаревича [3; 5] та Р.Я. Ріжняка та В.А. Кушніра [4].

Останнім часом велика увага приділяється саме системам рівнянь, що стали основною частиною зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Питання методики навчання розв'язування різних типів рівнянь та нерівностей із параметрами розглядаються у статтях А.В. Прус та В.О. Швеця, опублікованих у науково-методичному журналі «Математика у рідній школі» та у посібнику [6].

Мета статті: узагальнити метод інтервалів для нерівностей різного типу у курсі математики старшої школи.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Найбільш ефективним методом розв'язування нерівностей, заданих у вигляді добутку деяких функцій, є метод інтервалів. Метод інтервалів розв'язування нерівностей ґрунтується на такій фундаментальній властивості монотонних функцій: будь-яка монотонна функція або зберігає свій знак на області визначення, або змінює його точно один раз у своєму нулі (тобто графік функції або не перетинає вісь абсцис, або перетинає її точно один раз).

Розв'язати нерівність – означає знайти множину усіх її розв'язків або встановити, що нерівність розв'язків не має. Областю визначення D нерівності називають множину всіх значень невідомої, на якій існують функції f(x), g(x).

При визначенні D часто вводяться також додаткові умови, які пов’язані з характером нерівності.

Перед тим як розглянути сам метод інтервалів, поговоримо про характер монотонності суперпозиції функцій. Нехай y = f (g (x)) – суперпозиція функцій. Тоді, якщо існує суперпозиція функцій y = f (g (x)), маємо:

1. Якщо функції f (x) і g (x) є зростаючими, то й y = f (g (x)) буде зростаючою;

2. Якщо функція f (x) є зростаючою, а функція g (x) – спадною, то y = f (g (x)) буде спадною;

3. Якщо функція f (x) є спадною, а функція g (x) – зростаючою, то y = f (g (x)) буде спадною;

4. Якщо функції f (x) і g (x) є спадними, то y = f (g (x)) буде зростаючою.З цих тверджень можна зробити висновок, що при співпадаючому характері монотонності функцій їх суперпозиція монотонно зростає, а при не співпадаючому характері монотонності – їх суперпозиція монотонно спадає.

Розв’язати систему нерівностей означає знайти перетин розв’язків нерівностей, з яких вона складається.

Для перетворення заданих нерівностей до більш простих чи відомих діємо наступним чином:

1) знаходиться область визначення нерівності;

2) шляхом різних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності, розв’язки якої можна знайти за відомими формулами або за відомим алгоритмом, далі знаходяться розв’язки перетвореної нерівності;

3) перевіряється належність знайдених розв’язків до області визначення нерівності і визначається загальний розв’язок з отриманої сукупності чи системи розв’язків.

У деяких випадках недоцільно знаходити область визначення нерівності, яка розв’язується, оскільки перевірка знайдених значень невідомого за умовою заданої нерівності є складовою частиною розв’язування нерівності. Але ця властивість визначається безпосередньо характером заданої нерівності.

Метод інтервалів полягає у розкладанні на множники лівої частини нерівності і порівнянні її з нулем через визначення знаку нерівності на кожному з інтервалів, отриманих при розбитті числової прямої.

Розглянемо загальний принцип використання методу інтервалів для розв'язування нерівності $f(x) > g(x)$. У випадку нерівності $f(x)<g(x)$ ця схема аналогічна.

Отже,

1. Перенести всі члени заданої нерівності вліво: $f(x)–g(x)>0$.

2. Ліву частину отриманої нерівності привести до спільного знаменника: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$.

3. Многочлени $P(x)$ та $Q(x)$ розкласти на множники. Якщо при цьому з'являються однакові множники, треба замінити їх відповідними степенями. Наприклад, $\frac{(x-a)(x-b)(x-a)}{x-c} > 0 \Rightarrow \frac{(x-a)^2(x-b)}{x-c} > 0$

При скороченні треба пам'ятати, що

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a \neq 0 \\ \frac{x-b}{x-c} > 0 \end{cases} .$$

4. Виключити з розкладання нелінійні множники.

Це виключення виконується за правилом:

• Якщо в розкладанні є множник ax^2+bx+c, де $b^2–4ac<0$, тоді його виключення залежить від знака старшого коефіцієнта a і виконується так:

$$\frac{(ax^2+bx+c)P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

• Якщо в розкладанні є множник $(x–a)^{2k}$, тоді його виключення виконується так:

$$\frac{(x-a)^{2k}P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a = 0, \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\frac{(x-a)^{2k}P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a \neq 0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0, \end{array}\right.$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{2k}Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a \neq 0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \end{array}\right.$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{2k}Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a \neq 0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0. \end{array}\right.$$

• Нелінійний множник $(x–a)^{2k+1}$ виключається так:

$$\frac{(x-a)^{2k+1}P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)P(x)}{Q(x)} > 0.$$

5. На числовій осі відмітимо точки, в яких перетворюються на нуль усі множники, що стоять у чисельнику і знаменнику лівої частини нерівності, отриманої після виконання пунктів 1-4.

При цьому слід звертати увагу на строгість чи нестрогість нерівності. Якщо нерівність строга, тоді усі точки «вирізуються» з числової осі, інакше, точки, які відповідають множникам у чисельнику треба «зафарбувати».

6. Поставити знаки в кожному проміжку, на які числова вісь розбивається відміченими точками.

Спочатку поставити знак у найправішому проміжку на числовій осі за правилом:

«+» – якщо кількість множників виду (a–x) парна,

«–» –якщо кількість множників виду (a–x) непарна.

Знаки в інших проміжках ставляться з урахуванням черговості в сусідніх проміжках.

7. Вибрати проміжки, в яких стоїть знак «+», якщо нерівність, отримана у пункті 4 має вигляд $F(x)>0$, або знак «–», якщо нерівність, отримана у пункті 4 має вигляд $F(x)<0$. Ці проміжки містять у собі крайні точки, відмічені на числовій осі зафарбованими і не містять «вирізані» точки [7].

Приклад 1. Розв’язати нерівність

$$\frac{\sqrt{x^2+5x}-4x+6}{x-2} \leq -2$$

Для узагальнення розглянемо 2 різних способи розв’язування даної нерівності і порівняємо їх.

І спосіб

1. Перенесемо праву частину до лівої, зведемо до спільного знаменника і виконаємо додавання дробів:

$$\frac{\sqrt{x^2+5x}-4x+6}{x-2}+2 \leq 0,$$

$$\frac{\sqrt{x^2+5x}-2x+2}{x-2} \leq 0,$$

2. Нехай

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x}-2x+2}{x-2}$$

3. Знайдемо ОДЗ:

Складемо систему, в якій розглянемо чисельник та знаменник нашого дробу. Знаменник не повинен дорівнювати нулеві, для чисельника визначаємо проміжок:

$$D(f)\colon \begin{cases} x^2+5x \geq 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \leftrightarrow \quad x(-\infty; -5] \cup [0;2) \cup (2;+\infty)$$

4. Визначимо «нулі» функції:

$$\sqrt{x^2+5x} = 2x-2$$

Піднесемо до квадрату за умови

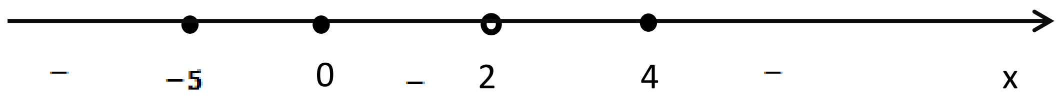
$$x^2+5x = 2x-2^2$$

$x_1 = \frac{1}{3}$ - сторонній корінь

$$x_2 = 4$$

5. Знаки функції на D(f):

На проміжку розставляємо знаки з метою визначення



Отже, розв’язком нерівності буде проміжок $x \in (-\infty; -5] \cup [0; 2) \cup (4; +\infty)$

Відповідь: $x \in (-\infty; -5] \cup [0; 2) \cup (4; +\infty)$.

II спосіб

Розглянемо розв’язування рівняння класичним методом:

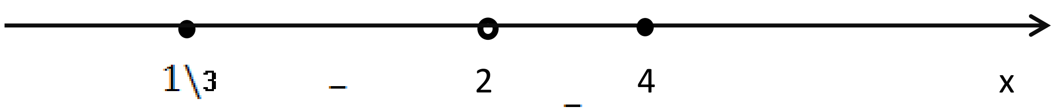
$$\frac{\sqrt{x^2+5x}-2x+2}{x-2} \le 0,$$

$$\left[\begin{cases}\sqrt{x^2+5x}-2x+2 \le 0\\ x-2>0\end{cases}\right.\\ \left.\begin{cases}\sqrt{x^2+5x}-2x+2 \ge 0\\ x-2<0\end{cases}\right.$$

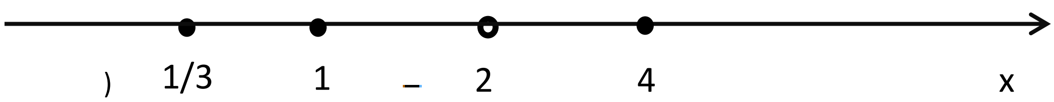
$$\left[\begin{cases}\sqrt{x^2+5x} \le 2x-2\\ x>2\end{cases}\right.\\ \left.\begin{cases}\sqrt{x^2+5x} \ge 2x-2\\ x<2\end{cases}\right.$$

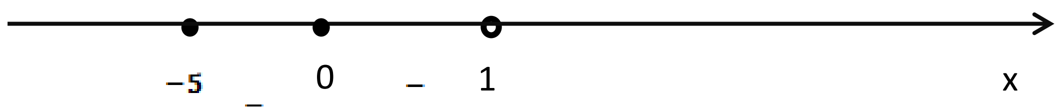
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2 \ge 0\\ x^2+5x \le 4x^2+4-8x\end{cases}\\ \begin{cases}2x-2 \le 0\\ x \in \emptyset\end{cases}\\ \begin{cases}2x-2 \ge 0\\ x^2+5x \le 4x^2+4-8x\\ x<2\end{cases}\\ \begin{cases}2x-2<0\\ x^2+5x \ge 0\\ x<2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ (x-4)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) \ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x \in [1;2)\\ (x-4)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ x(x+5) \ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$



[4;+∞)





$(-\infty;-5] \cup [0;1)$

Відповідь:

$x \in (-\infty;-5] \cup [0;2) \cup (4;+\infty)$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Перевірка знань з багатьох тем шкільного курсу математики зводиться до розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем. Однак слід зазначити, що незважаючи на велику увагу, що приділяється вивченню теорії рівнянь в школі, результат оволодіння знаннями вкрай низький.

Ми представили основні методичні аспекти вивчення лінії рівнянь (нерівностей) в ШКМ, знання яких дозволить вчителю математики, студенту-практиканту успішно навчати понять змістовної лінії рівнянь і нерівностей, а також їх розв'язування.

Для прикладу наведено нерівність, яку ми розв'язали 2 різними способами з метою показати важливість узагальнення рівнянь, нерівностей та їх систем у ШКМ.

Для апробації розробленої методики було проведено організаційну роботу та проведено експериментальні заняття щодо вивчення та використання властивостей нерівностей в старшій школі в процесі узагальнення функціональної лінії на завершальній стадії вивчення математики в загальноосвітній школі.

Список використаної літератури

1. Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи: навч. посіб. для вступників до вищ. навч. закл. та слухачів підготов. від-нь / В.О. Гришина, О.Б. Папковська ; Одеськ. нац. політехн. ун-т. - Одеса: Наука і техніка, 2008. – 188 с.
2. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк; науковий

редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг : Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 324 с.

3. Талочкин П.Б. Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания – М.: Просвещение, 1970. – 160 с.

4. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики // Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

5. Бекаревич А.Н. Уравнения в школьном курсе математики. – Минск: "Нар. асвета", 1968. — 152 с.

6. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во «Рута», 2016. – 468 с.

7. Сулик Н.Я. Навчально-методичний посібник (запитання, відповіді, зразки розв’язування, вправи для закріплення). Розв’язування нерівностей: показникових, логарифмічних, тригонометричних – Львів, ЛТЕКНУЛП, 2011 р. – 39 с.