УДК 519.21

ПОГЛИБЛЕННЯ НЕРІВНОСТІ БЕРРІ-ЕССЕЄНА ДЛЯ СТАНДАРТНОГО РОЗПОДІЛУ БЕРНУЛЛІ

Макарчук Олег, Кіров Артем

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті представлено поглиблення нерівності Беррі-Ессеєна для симетричного розподілу Бернуллі.

Ключові слова: центральна гранична теорема, нерівність Беррі-Ессеєна, дискретний розподіл, функція розподілу, розподіл Бернуллі, математичне сподівання.

Promotion of Berri-Esseen inequality for standart Bernulley disrtibution

O Makarchuk, A Kirov

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

The article presents the deepening of the Berry-Essen inequality for the symmetric Bernoulli distribution.

Keywords: central limit theorem, Berry-Essen inequality, discrete distribution, distribution function, Bernoulli distribution, mathematical expectation.

Одним з класичних результатів теорії ймовірностей є центральна гранична теорема, яка стверджує, що для послідовності однаково розподілених незалежних в сукупності випадкових величин ξ_n, які є стандартизованими (тобто віднормованими і відцентрованими):

$$M(\xi_n) = 0, \forall\, n \in N;$$

$$D(\xi_n) = 1, \forall\, n \in N$$

для довільного відрізка $[a; b]$ виконується граничне співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{n}} \in [a; b]\right) = F_\eta(b) - F_\eta(a),$$

де

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

є класичною функцією Гаусса, значення якої протабульовані в таблицях.

Відомо [4, с. 75], що величина $P\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}} < x\right)$ достатньо швидко збігається до $F_\eta(x)$, однак цікаво оцінити відповідну швидкість.

Відповідну оцінку надає нерівність Беррі – Ессеєна:

$$\left|P\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n - nM(\xi_1)}{\sigma_\xi\sqrt{n}} < x\right) - F_\eta(x)\right| \le \frac{C\cdot M(|\xi_1 - M(\xi_1)|^3)}{\sqrt{n}\cdot {\sigma_\xi}^3},$$

в загальному випадку в ролі сталої можливо взяти $C = 0{,}4784$. На даний відповідну сталу продовжують уточнювати.

Безумовно актуальним питанням являється проблема уточнення сталої C для конкретних класів випадкових величин. Робота присвячена проблемі уточнення сталої Беррі – Ессеєна для стандартного розподілу Бернуллі.

Об’єкт дослідження: нерівність Беррі – Ессеєна.

Предмет дослідження: оцінки для сталої Беррі – Ессеєна розподілу Бернуллі.

Мета дослідження: поглибити нерівність Беррі – Ессеєна для стандартного симетричного розподілу Бернуллі.

Розглянемо випадкову величину, що має стандартний біноміальний (бернулевий) розподіл з параметром 0,5:

$$\xi \in B_{0,5}.$$

У цьому випадку таблиця розподілу має вигляд:

ξ	0	1
	0,5	0,5

Функція розподілу у цьому випадку має вигляд:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}5, \quad\quad x \in (0; 1] \\ 1, x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Розглянемо послідовність випадкових величин:

$$\psi_n = \frac{\xi_n - M_{\xi_n}}{\sigma_{\xi_n}}.$$

де ξ_n послідовність однаково розподілених незалежних в сукупності випадкових величин, які мають стандартний бернулевий розподіл з параметром 0,5.

Отже, маємо:

$$P\left(\frac{\psi_1 + \cdots + \psi_n}{\sqrt{n}} < x\right) = F_\eta(x) \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{\frac{\xi_1 - M_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}} + \cdots + \frac{\xi_n - M_{\xi_n}}{\sigma_{\xi_n}}}{\sqrt{n}} < x\right) = F_\eta(x) \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}} < x\right) = F_\eta(x) \Rightarrow$$

$$P\left(\xi_1 + \cdots + \xi_n - nM_{\xi_1} < x\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}\right) = F_\eta(x) \Rightarrow$$

$$P\left(\xi_1 + \cdots + \xi_n < x\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}\right) = F_\eta(x).$$

Здійснимо заміну:

$$x\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1} = t.$$

Зрозуміло, що

$$x = \frac{t - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}}$$

відповідно маємо:

$$P(\xi_1 + \cdots + \xi_n < t) = F_\eta\left(\frac{t - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}}\right).$$

Відповідно нерівність Беррі – Ессеєна має вигляд:

$$\left|P(\xi_1 + \cdots + \xi_n < t) - F_\eta\left(\frac{t - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}}\right)\right| \le \frac{C \cdot M(|\xi_1 - M(\xi_1)|^3)}{\sqrt{n} \cdot \sigma_{\xi_1}^3},$$

Формалізуємо процес ідентифікації сталої $C(\xi)$:

Введемо функцію:

$$g_n(t) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_{\xi_1}^3}{M(|\xi_1 - M(\xi_1)|^3)} \cdot \left| P(\xi_1 + \cdots + \xi_n < t) - F_\eta\left(\frac{t - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}}\right) \right|$$

Тоді маємо:

$$C(\xi) = \sup_n \left(\sup_R g_n(t) \right).$$

Пояснимо знаходження відповідної оцінки більш послідовно.

Отже, нехай

$$A_n = \sup_R \left(\frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_{\xi_1}^3}{M(|\xi_1 - M(\xi_1)|^3)} \cdot \left| P(\xi_1 + \cdots + \xi_n < t) - F_\eta\left(\frac{t - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}}\right) \right| \right),$$

далі сталу визначаємо як відповідний сопремум:

$$C(\xi) = \sup_n (A_n).$$

Потрібно також свідомо розуміти, що більш точно визначити сталу у прямому вигляді:

$$B_n = \sup_R \left(\frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_{\xi_1}^3}{M(|\xi_1 - M(\xi_1)|^3)} \cdot \left| P\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}} < x\right) - F_\eta(x) \right| \right),$$

далі сталу визначаємо як відповідний сопремум:

$$C(\xi) = \sup_n (B_n).$$

Недоліком відповідного підходу є те, що при ньому не використовується властивостей замкнености класу розподілу ξ.Ми будемо використовувати перший підхід, адже бернулевий розподіл замкнений відносно операції згортки. Знаходимо

$$\frac{\sigma_{\xi_1}^3}{M(|\xi_1 - M(\xi_1)|^3)} = 1.$$

В загальному випадку маємо:

$$g_n(t) = \sqrt{n} \cdot \left| P(\xi_1 + \cdots + \xi_n < t) - F_\eta\left(\frac{t - n \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot \sqrt{n}}\right) \right|,$$

або

$$g_n(t) = \sqrt{n} \cdot \left| P(\xi_1 + \dots + \xi_n < t) - F_\eta\left(\frac{2t - n}{\sqrt{n}}\right) \right|.$$

Отож, при $n = 2$, маємо наступну функцію

$$g_2(t) = \sqrt{2} \cdot \left| P(\xi_1 + \xi_2 < t) - F_\eta\left(\frac{2t - 2}{\sqrt{2}}\right) \right|$$

Зрозуміло, що

$$\xi_1 + \xi_2 \in B_{2;0,5}$$

Побудуємо графік функції $g_2(t)$. Для цього зазначимо, що

$$F_\eta\left(\frac{2t-2}{\sqrt{2}}\right) = 0.5 + \frac{1}{2} erf\left(\frac{\frac{2t-2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) = 0.5 + 0.5erf(t-1)$$

В подальшому буде використана вбудована функція помилок в *wolframalpha:*

$$erf(k) = \int_0^k \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2} dx$$

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}25, \quad x \in (0; 1] \\ 0{,}75, x \in (1; 2] \\ 1, x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Для побудови графіка ми використали команду в сервісі *wolframalpha:*

Piecewise[{{|0-(0.5+0.5erf(x-1))|, x<= 0},{|0.25-(0.5+0.5erf(x-1))|, 0<x<=1},{|0.75-(0.5+0.5erf(x-1))|, 1<x<=2}, {|1-(0.5+0.5erf(x-1))|, x>2}}] from -2 to 5

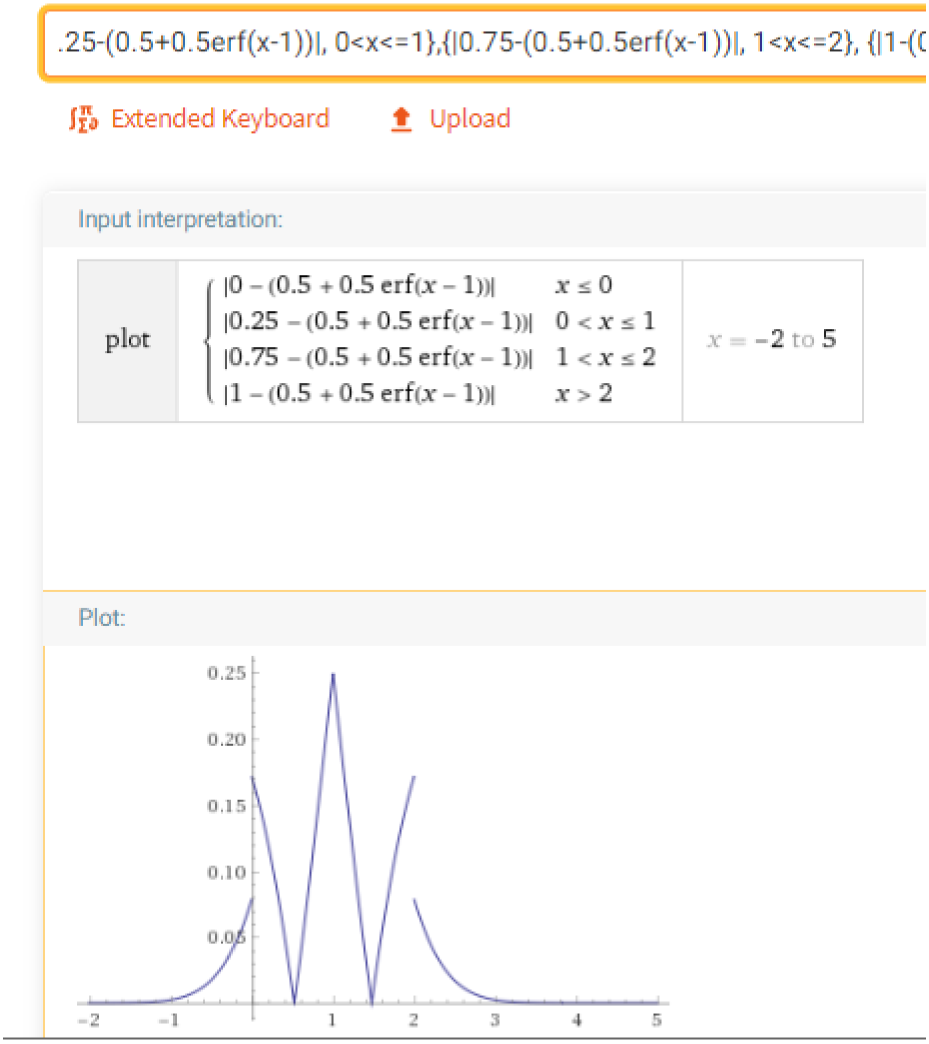

Рис 1. Графік $g_2(x)$.

Отже, маємо:

$$\sup_R g_2(t) = 0{,}25.$$

Використовуючи аналогічну методологію до $g_2(t)$ маємо наступні значення $sup_R\, g_n(t)$.

Побудуємо наступну таблицю значень похибок.

Таблиця 1.Значення $\sup_R g_n(t)$ для стандартного бернулевого розподілу

n	$\sup\limits_R g_n(t).$
2	0,25
3	0,31
4	0,331
5	0,349

У даному випадку прослідковується чітка асимптотика консолідації значень, що дозволяє зробити теоретичний висновок.

Таким чином, для стандартного розподілу Бернуллі з параметром 0,5 можливо вказати наступне поглиблення нерівності Беррі – Ессеєна:

$$\left|P\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}}<x\right)-F_\eta(x)\right| \leq \frac{0{,}35\cdot M(|\xi_1-M(\xi_1)|^3)}{\sqrt{n}\cdot\sigma_{\xi_1}^3}.$$

Список літератури

1. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. − 320 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
5. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1979. − 184 с .