УДК 519.21

АПРОКСИМАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ БЕРНУЛЛІ ПОЛІНОМАМИ ТЕЙЛОРА

Макарчук Олег, Кузьмич Юлія

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті представлено оцінки наближень характеристичної функції для асиметричного розподілу Бернуллі поліномами Тейлора.

Ключові слова: розклад Тейлора, характеристична функція, дискретний розподіл, функція розподілу, розподіл Бернуллі, математичне сподівання.

Approximation of the characteristic function of Bernulli distribution by Tylor polynomials

O Makarchuk, J Kuzmich

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

The article presents estimates of the approximations of the characteristic function for the asymmetric Bernoulli distribution by Taylor polynomials.

Keywords: Taylor schedule, characteristic function, discrete distribution, distribution function, Bernoulli distribution, mathematical expectation.

Під ***характеристичною функцією*** випадкової величини ξ розуміють комплекснозначну функцію:

$$f_{\xi}(t) = M\left(e^{i\xi t}\right), \text{де } i = \sqrt{-1}.$$

Характеристична функція широко використовується в доведенні граничних теорем та законів великих чисел. Якщо бути більш точним класичним доведення закону великих чисел у формі Хінчіна та центральної граничної теореми Ляпунова, саме вона була першою граничною теоремою яка дала поштовх до появи інших поглиблень та уточнень, є доведення які грунтується на використанні теореми Леві про зв'язок збіжності за розподілом через характеристичні функції і властивості збіжності до виродженого розподілу (якщо послідовність незалежних в сукупності випадкових величин збігається за розподілом до сталої то вона збігається до цієї сталої і за ймовірністю – фундаментальна властивість для законів великих чисел).

Використовуючи розклад Тейлора для експоненти

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

можливо вивести формулу Тейлора для характеристичних функцій випадкових величин:

$$f_\xi(t) = 1 + \frac{itM_\xi}{1!} - \frac{t^2 M_{\xi^2}}{2!} - \frac{it^3 M_{\xi^3}}{3!} + \frac{t^4 M_{\xi^4}}{4!} + \frac{it^5 M_{\xi^5}}{5!} + \cdots$$

В даній формулі важливим є те, що її використання прямим чином залежить від існування моментів всіх порядків для відповідної випадкової величини:

$$|M_{\xi^n}| < +\infty, \forall n \in N.$$

Формулу Тейлора для характеристичних функцій випадкових величин можливо представити через часткові суми з використанням залишкового члена:

$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!} + r_n(t)$$

Поліномами Тейлора у даному випадку вважаються комплексно значні поліноми виду:

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}$$

На даний момент не існує загальних оцінок для даного члена $r_n(t)$ в термінах аналогічних залишковому члену у формі Лагранжа.

Робота присвячена аналізу оцінок для залишкового члена $r_n(t)$ для розкладу Тейлора характеристичної функції випадкової величини, що має стандартний розподіл Бернуллі.

Об’єкт дослідження: розклад Тейлора для характеристичних функцій випадкових величин.

Предмет дослідження: оцінки залишкових членів в розкладі Тейлора для характеристичної функції випадкової величини, що має стандартний розподіл Бернуллі.

Мета дослідження: знайти оцінки залишкових членів в розкладі Тейлора для характеристичної функції випадкової величини, що має стандартний розподіл Бернуллі.

Розглянемо випадкову величину, що має стандартний біноміальний (бернулевий) розподіл з параметром 0,8:

$$\xi \in B_{0,8}.$$

У цьому випадку таблиця розподілу має вигляд:

ξ	0	1
	0,2	0,8

Функція розподілу у цьому випадку має вигляд:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}2, \quad\quad x \in (0; 1] \\ 1, x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Знайдемо характеристичну функцію:

$$f_{\xi}(t) = 0{,}2 \cdot e^{(i \cdot t \cdot 0)} + 0{,}8 \cdot e^{(i \cdot t \cdot 1)} =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}8 \cdot \cos(t) + 0{,}8 \cdot i \cdot \sin(t).$$

Зрозуміло, що для кожного натурального n

$$\xi^n \in B_{0,8}$$

а тому

$$M(\xi^n) = 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8.$$

Отже, маємо:

$$f_{\xi}(t) = 1 + \frac{it \cdot 0{,}8}{1!} - \frac{t^2 \cdot 0{,}8}{2!} - \frac{it^3 \cdot 0{,}8}{3!} + \frac{t^4 \cdot 0{,}8}{4!} + \frac{it^5 \cdot 0{,}8}{5!} + \cdots.$$

Позначимо:

$$g_n(t) = Re\big(r_n(t)\big) = Re\left(f_\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}\right),$$

$$h_n(t) = Im\big(r_n(t)\big) = Im\left(f_\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}\right)$$

Для здійснення оцінок потрібно ввести також величини:

$$\tilde{g}_n(t) = \frac{g_n(t)}{2 + \deg(Re\left(f_\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}\right))},$$

$$\tilde{h}_n(t) = \frac{h_n(t)}{2 + \deg(Im\left(f_\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}\right))},$$

Маємо:

$$g_1(t) = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot \cos(t) - 1,$$

$$h_1(t) = 0{,}8 \cdot \sin(t),$$

$$g_2(t) = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot \cos(t) - 1,$$

$$h_2(t) = 0{,}8 \cdot \sin(t) - \frac{t \cdot 0{,}8}{1!},$$

$$g_3(t) = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot \cos(t) - 1 + \frac{t^2 \cdot 0{,}8}{2!},$$

$$h_3(t) = 0{,}8 \cdot \sin(t) - \frac{t \cdot 0{,}8}{1!},$$

$$g_4(t) = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot \cos(t) - 1 + \frac{t^2 \cdot 0{,}8}{2!},$$

$$h_4(t) = 0{,}8 \cdot \sin(t) - \frac{t \cdot 0{,}8}{1!} + \frac{t^3 \cdot 0{,}8}{3!}.$$

Оцінимо залишковий член за наступною формулою:

$$\Delta_n(\xi) \; = \max(\max_R(|\tilde{g}_n(t)|)\,; \max_R\big(\big|\tilde{h}_n(t)\big|\big))$$

У цьому випадку залишковий член має представлення:

$$r_n(t) \sim \Delta_n(\xi)(t^l + it^k),$$

де

$$l = 2 + \deg(Re\left(f_\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}\right))$$

$$k = 2 + \deg(Im\left(f_\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^n t^n M_{\xi^n}}{k!}\right))$$

Оцінимо для прикладу $\Delta_3(\xi)$.

Маємо:

$$g_3(t) = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot \cos(t) - 1 + \frac{t^2 \cdot 0{,}8}{2!},$$

$$h_3(t) = 0{,}8 \cdot \sin(t) - \frac{t \cdot 0{,}8}{1!},$$

$$\tilde{g}_3(t) = \frac{0{,}8}{t^4} \cdot (\cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2!})$$

$$\tilde{h}_3(t) = \frac{0{,}8}{t^3} \cdot (\sin(t) - \frac{t}{1!}).$$

Побудуємо відповідні графіки використовуючи сервіс.

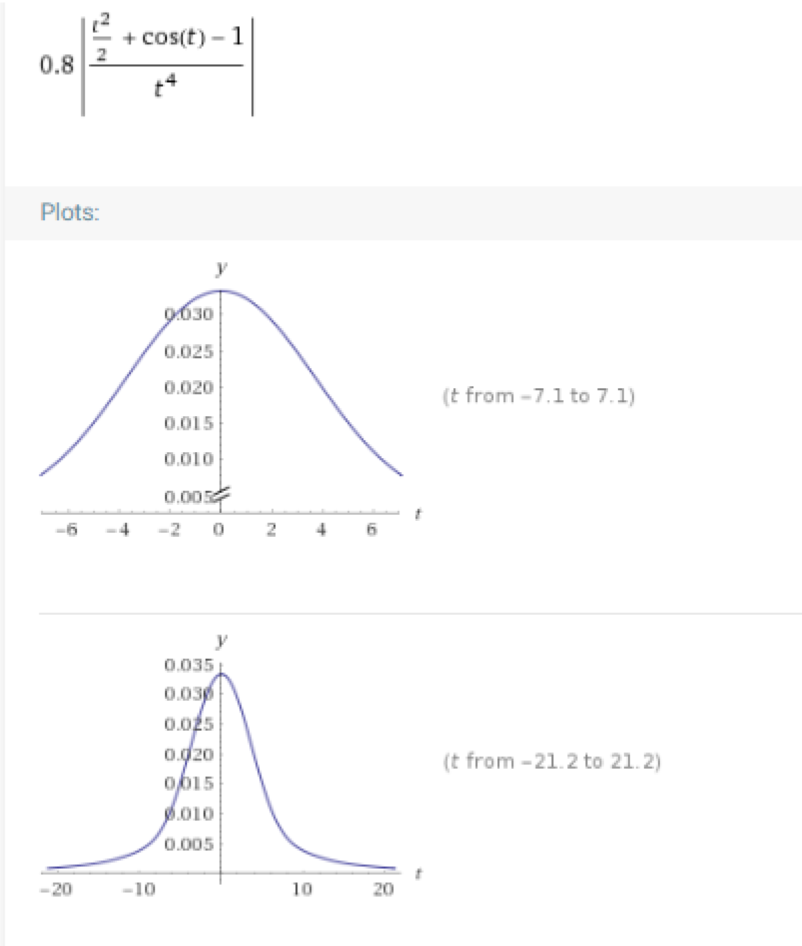

Рис 1. Графік $|\tilde{g}_3(t)|$ *для* $\xi \in B_{0,8}$.

Для побудови відповідного графіку ми не використовували спеціалізованих команд, а просто використали команду в сервісі https://www.wolframalpha.com:

|0.8·(cos(t)-1+(t^2)/2!)/t^4|

Аналогічним чином будуємо і інший графік.

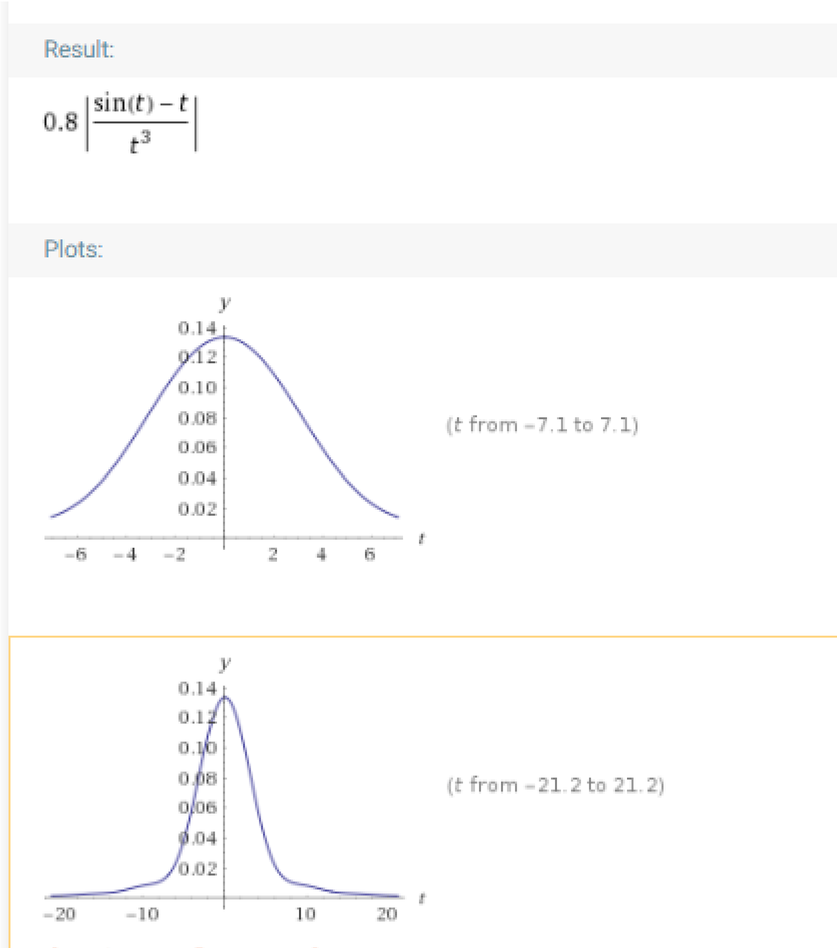

Рис 2. Графік $|\widetilde{h}_3(t)|$ *для* $\xi \in B_{0,8}$.

Отже, маємо:

$$\Delta_3(\xi) = 0{,}013.$$

Таблиця 1.Значення похибок $\Delta_n(\xi)$.

n	$\Delta_n(f)$
1	0,0943
2	0,728
3	0,013
4	0,0087

Таким чином, маємо що прослідковується доволі швидка асимптотика збіжності часткових сум розкладу Тейлора до відповідної характеристичної функції. З ростом кількості членів часткової суми точність наближення збільшується, як по дійсній так і по уявній частині.

Список використаної літератури

1. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. − 320 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
5. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1979. − 184 с .