

УДК 372.851

## **ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ**

**Манець Світлана**

**Науковий керівник: кандидат педагогічних наук,  
старший викладач Ботузова Ю.В.**

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені  
Володимира Винниченка, м.Кропивницький, Україна*

*В статті піднімається питання використання педагогічних програмних засобів на заняттях з математики, а саме розглядаються методичні особливості застосування програмного засобу GeoGebra при розв'язуванні рівнянь з параметрами. Описано важливість використання вчителем інформаційно-комунікаційних технологій під час проведення занять з математики. Наведено ряд переваг програми GeoGebra перед іншими педагогічними програмними засобами. Розглянуто деякі аспекти роботи з програмою GeoGebra та на прикладах показано практичне її використання. Визначено перспективи подальших досліджень.*

**Ключові слова:** *методика навчання математики, розв'язування рівнянь, параметри, педагогічні програмні засоби, GeoGebra.*

## **USE OF GEOGEBRA SOFTWARE IN SOLVING EQUATIONS WITH PARAMETER**

**S. Manets**

**Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences Yu. Botuzova**

*The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,  
Kropyvnytsky, Ukraine*

*In the article, we raise the problem of using different pedagogical software in mathematics classes. Author considers the methodological features of the application of GeoGebra software in solving equations with parameters. The importance of the using of information and communication technologies by a teacher in conducting mathematics classes is described. We also describe some of the advantages of GeoGebra over other educational tools. Some aspects of working with GeoGebra are considered and some practical examples are given. Prospects for further research have been identified.*

**Keywords:** *methods of teaching math, solve equation, parameters, educational software, GeoGebra.*

**Постановка проблеми.** Сучасний процес навчання важко уявити без використання інформаційних технологій. Комп'ютерна техніка та Інтернет широко використовуються не тільки для вивчення інформатики, а і для вивчення інших предметів, зокрема і математики. Швидкий розвиток інформаційно-комунікаційних технологій, що проникають у всі сфери життя, в тому числі і в сферу навчання, обумовлює необхідність комп'ютерної підтримки освітнього процесу. В умовах інформаційного суспільства одним із напрямків роботи вчителя має стати питання використання у роботі інформаційних технологій. А так як сучасні учні мають розвинене комп'ютерне мислення та здатність до швидкого засвоєння комп'ютерних програм, то вчитель, використовуючи ІКТ в процесі роботи, має змогу активізувати пізнавальний інтерес учнів, що відобразиться на рівні та якості засвоєння матеріалу.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Аналіз літератури свідчить про інтенсивність досліджень щодо впровадження інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема комп'ютерно-орієнтованих систем навчання. Наукові пошуки започаткували В. Ю. Биков, В. М. Глушков, М. І. Жалдак, Ю. С. Рамський, А. П. Єршов. Зокрема, особливості та функціональні можливості використання нових інформаційних технологій в навчанні математики розглядалися в роботах М.І. Жалдака, М.Я. Ігнатенка, В.І. Клочка, В.В. Корольського [3].

Широкого використання в освітньому процесі школи набули розробки вітчизняних дослідників (Gran, DG, ТерМ і т.д.). Розроблено та використовується велика кількість педагогічних програмних засобів, таких як: Derive, GeoGebra, Gran1, Gran-2D, Gran-3D, DG, Maple, Mathematika і ін. Одні з них орієнтовані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші – на учнів середніх навчальних закладів, які лише почали вивчати шкільний курс математики. Найбільш придатними для підтримки навчання математики в середніх навчальних закладах видаються комплект програм GeoGebra, GRAN (Gran1, Gran-2D, Gran-3D) і Derive. Названі програмні засоби

прості у використанні, їхні інтерфейси максимально наближені до інтерфейсів найбільш поширених програм загального призначення [2]. Питаннями впровадження інформаційно-комунікаційних технологій в шкільну освіту займалися вітчизняні вчені: М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, О.О. Гриб'юк, А.П. Єршов, Ю.І. Машбиць, В.М. Монахов та інші.

В статті Ботузової Ю.В. [1] зазначається, що перед сучасним вчителем з'являється проблема вибору відповідного програмного забезпечення, яке б задовольняло цілі навчання, було доступним, мало простий і в той же час функціональний інтерфейс. Таким, потужним та зручним навчальним інструментом при вивченні математики є GeoGebra – це програма динамічної математики для всіх рівнів освіти, яка об'єднує геометрію, алгебру, таблиці, графіки, статистику та обчислення в одному простому у використанні пакеті. Також GeoGebra є швидко зростаючим співтовариством мільйонів користувачів, розташованих майже у кожній країні. GeoGebra стала провідним постачальником програми динамічної математики, яка використовується для підтримки науки, технологій, інженерії та математики (STEM), освіти та інновацій у викладанні та навчанні в усьому світі. Переваги GeoGebra вбачаються в наступному: безкоштовність; наявність онлайн, офлайн та мобільної версій програми; простий у використанні інтерфейс при потужному функціоналі; дозволяє створювати авторські інтерактивні навчальні матеріали у вигляді веб-сторінок; доступна на багатьох мовах та має величезну світову спільноту користувачів, де можна обмінюватись матеріалами та досвідом; відкритий вихідний код програмного забезпечення. Вільність доступу до даної програми дозволяє уникати проблем з ліцензуванням, що дозволяє учням та вчителям вільно користуватися нею як у класі, так і вдома [1].

Система GeoGebra доступна більше ніж 50 мовами світу, отримала кілька нагород освітніх програм у Європі та США (наприклад, EASA 2002, digital 2004, Comenius 2004, eTwinning 2006, AECT 2008, BETT 2009 finalist, Tech Award 2009, NTLC Award 2010, MERLOT Classics Award 2013, Microsoft Partner of the Year Award 2015, Archimedes 2016) [4].

**Мета статті:** розкриття методичних особливостей застосування програмного засобу GeoGebra при розв'язуванні рівнянь з параметрами.

**Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.** Специфіка розв'язування рівнянь з параметрами вимагає використання програмних засобів. Найбільш придатною програмою для роботи в школі є безкоштовна програма GeoGebra. А тому в даній статті буде розглянуто деякі аспекти роботи з нею та на прикладах розв'язування рівнянь з параметрами показано практичне її застосування. Наведемо декілька прикладів.

**Приклад 1.** Знайти розв'язки рівняння  $\sqrt{x + \frac{1}{8}} + \sqrt{x + \frac{1}{16}} = a - 2x$  в залежності від параметра  $a$ .

**Розв'язання. 1).** *Графічний метод – дослідження за допомогою програми GeoGebra.*

а) На полотні розмістимо повзунок  $a, a \in [-5; 40]; h = 0.01$

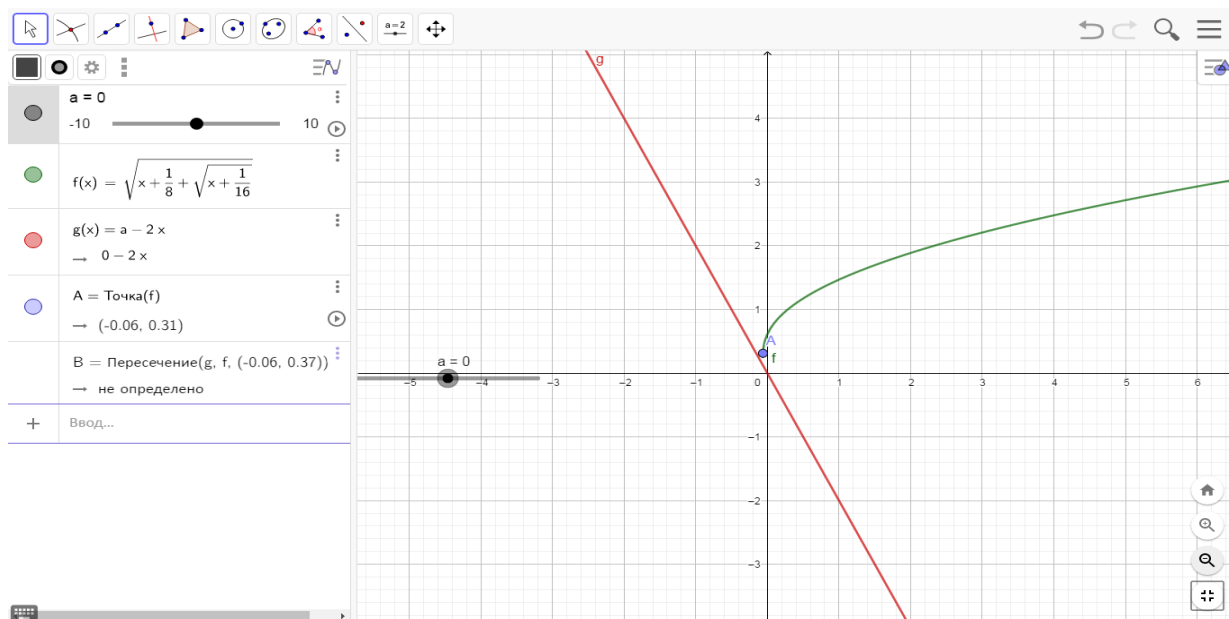


Рис. 1. Схематичне зображення графіків функцій  $f(x)$  та  $g(x)$

б) побудуємо графіки функцій для правої та лівої частини заданого

рівняння:  $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{8}} + \sqrt{x + \frac{1}{16}}$  та  $g(x) = a - 2x$  ;

с) вибираємо в меню пункт «Перетин» і відмічаємо на екрані два графіки функцій;

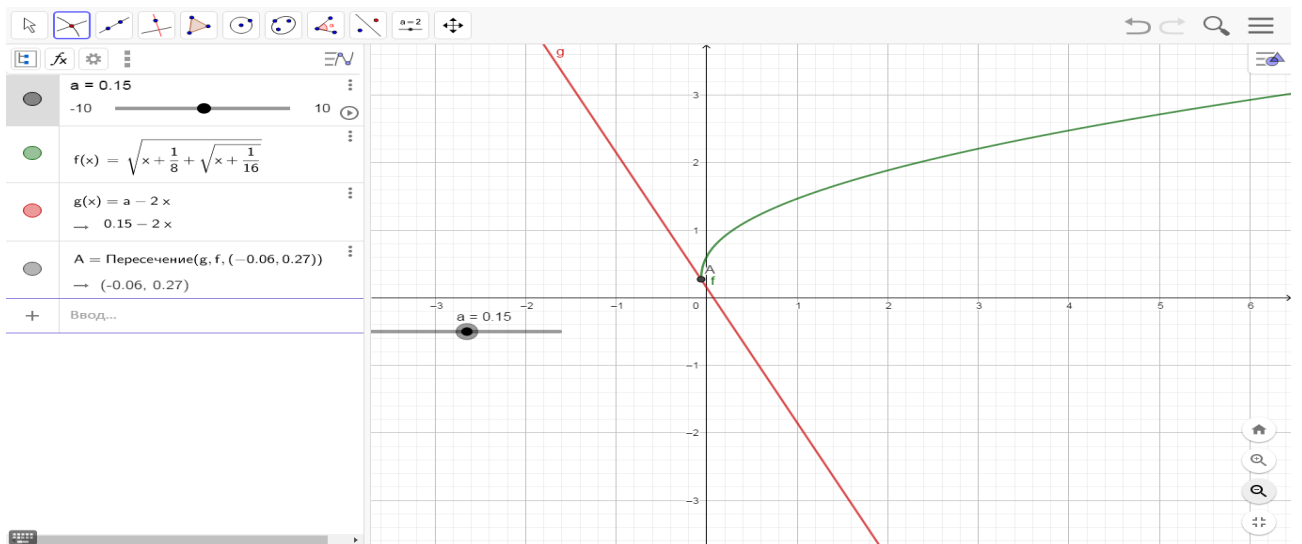


Рис. 2. Зображення точки перетину графіків функцій  $f(x)$  та  $g(x)$

d) змінюючи значення параметра  $a$  за допомогою повзунка, розглядаємо різні випадки розміщення графіків (рис.2):

- графіки перетинаються в точці  $A(-0.06; 0.27)$  при значенні параметра  $a = 0.15$  ;

- при  $a < 0.15$  графіки не перетинаються, а отже рівняння не має розв'язків.

- при  $a \geq 0.15$  графіки перетинаються в одній точці, координати якої залежать від значення  $a$ .

Програма не дає можливості знайти загальну формулу розв'язку рівняння, але вона допомагає проаналізувати для яких значень параметра  $a$  графіки функцій перетинаються, тобто рівняння має єдиний розв'язок.

Для отримання розв'язку рівняння та запису остаточної відповіді необхідно виконати аналітичні розрахунки, зважаючи на результати попередньо проведеного графічного дослідження.

## 2) Аналітичний метод.

Побудуємо схематично графіки функцій  $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{8}} + \sqrt{x + \frac{1}{16}}$  та  $g(x) = a - 2x$  для ( $a = 0$ ). Графік функції  $g(x) = a - 2x$  є графіком спадної

лінійної функції. Графік функції  $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{8}} + \sqrt{x + \frac{1}{16}}$  є зростаюча крива, найменше значення якої є точка  $A(-0.06; 0.32)$ .

Найменший розв'язок буде, коли функція  $g(x) = a - 2x$  проходить через

$$A(-0.06; 0.32)$$

точку . Тобто  $0.32 = a + 2 * 0.06$   $a = 0.32 - 0.12 = 0.15$  .

Значить для всіх  $a \geq 0.15$  завжди буде єдиний розв'язок. Знайдемо його:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{16}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x + \frac{1}{16}} + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = a - 2x$$

$$\left|\sqrt{x + \frac{1}{16}} + \frac{1}{4}\right| = a - 2x \quad . \text{ Так як } \sqrt{x + \frac{1}{16}} + \frac{1}{4} > 0 \quad , \text{ то } \sqrt{x + \frac{1}{16}} + \frac{1}{4} = a - 2x$$

$\sqrt{x + \frac{1}{16}} = \left(a - \frac{1}{4}\right) - 2x$  . Піднесемо праву і ліву частини рівняння до квадрату:

$$x + \frac{1}{16} = \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(a - \frac{1}{4}\right)x + 4x^2 ;$$

$$D = 16a^2 - 16\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) = 16a^2 - 16a^2 + 8a ;$$

$$x_1 = \frac{4a + 2\sqrt{2a}}{2} = 2a + \sqrt{2a} ; \quad x_2 = 2a - \sqrt{2a} .$$

Так як  $a - 2x \geq 0$  ,  $x \leq \frac{a}{2}$  , то  $x_1 = 2a + \sqrt{2a}$  – сторонній корінь.

Відповідь:  $x = 2a - \sqrt{2a}$  для всіх  $a \geq 0.15$  .

Приклад 2. Дослідити систему рівнянь: 
$$\begin{cases} -4x + ay = 1 + a \\ (6 + a)x + 2y = 3 = a \end{cases}$$

Розглянемо загальну схему розв'язування системи двох рівнянь з двома змінними у загальному випадку. Розв'язати систему рівнянь виду

$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$  можна швидше, якщо застосувати загальні формули. Останні можна отримати будь-яким способом, наприклад, способом додавання і віднімання. Розв'язок буде мати вигляд:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}; y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b};$$

При розв'язуванні системи рівнянь можуть виникнути три різних випадки.

1. Коефіцієнти при невідомих непропорційні:

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

Тоді, якими б не були вільні члени, рівняння має єдиний розв'язок, який наведений вище.

2. Коефіцієнти при невідомих пропорційні:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

Тоді важливо знати, чи знаходяться в тому ж відношенні і вільні члени.

Якщо знаходяться:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

то система рівнянь має безліч розв'язків. Причина цього та, що в розглянутому випадку одне із рівнянь є наслідком іншого, так що фактично в нас одне рівняння, а не два.

3. Коефіцієнти при невідомих пропорційні, але вільні члени не знаходяться в тому ж відношенні:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

Тоді система не має розв'язку, бо її графічна інтерпретація – це пара паралельних прямих, які не перетинаються.

*Розв'язання: 1) Аналітичний метод.*

Система має єдиний розв'язок, якщо коефіцієнти біля відповідних змінних не пропорційні, тобто:

$$\frac{-4}{6+a} \neq \frac{a}{2}$$

Розв'яжемо рівняння

$$\frac{-4}{6+a} \neq \frac{a}{2}$$

$$-4a = a(6+a)$$

$$a^2 + 6a + 8 = 0$$

За теоремою Вієта  $a_1 = -2$ ;  $a_2 = -4$ .

Якщо  $a = -2$  система має вигляд

$$\begin{cases} -4x - 2y = -1 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

Перевіримо умову пропорційності коефіцієнтів:  $\frac{-4}{4} = \frac{-2}{2} = \frac{-1}{1}$  – система має безліч розв'язків.

Якщо  $a = -4$  система має вигляд

$$\begin{cases} -4x - 4y = -3 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Перевіримо умову:  $\frac{-4}{2} = \frac{-4}{2} \neq \frac{-3}{-1}$  – система не має розв'язків.

Отже при  $a = -4$  система рівнянь не має розв'язку, при  $a = -2$  система рівнянь має безліч розв'язків, при  $a \neq -4; a \neq -2$  система має єдиний розв'язок.

2). *Графічний метод – дослідження за допомогою програми GeoGebra.*

а) на полотні розмістимо повзунок  $a, a \in [-10; 10]; h = 0,1$ ;

б) побудуємо графіки функцій з параметром  $a$  :

$$f(x) = \frac{1+a+4x}{a} \quad \text{та} \quad g(x) = \frac{3+a-(6+a)x}{2}. \quad \text{Вибираємо в меню пункт}$$

«Перетин» (рис.3).



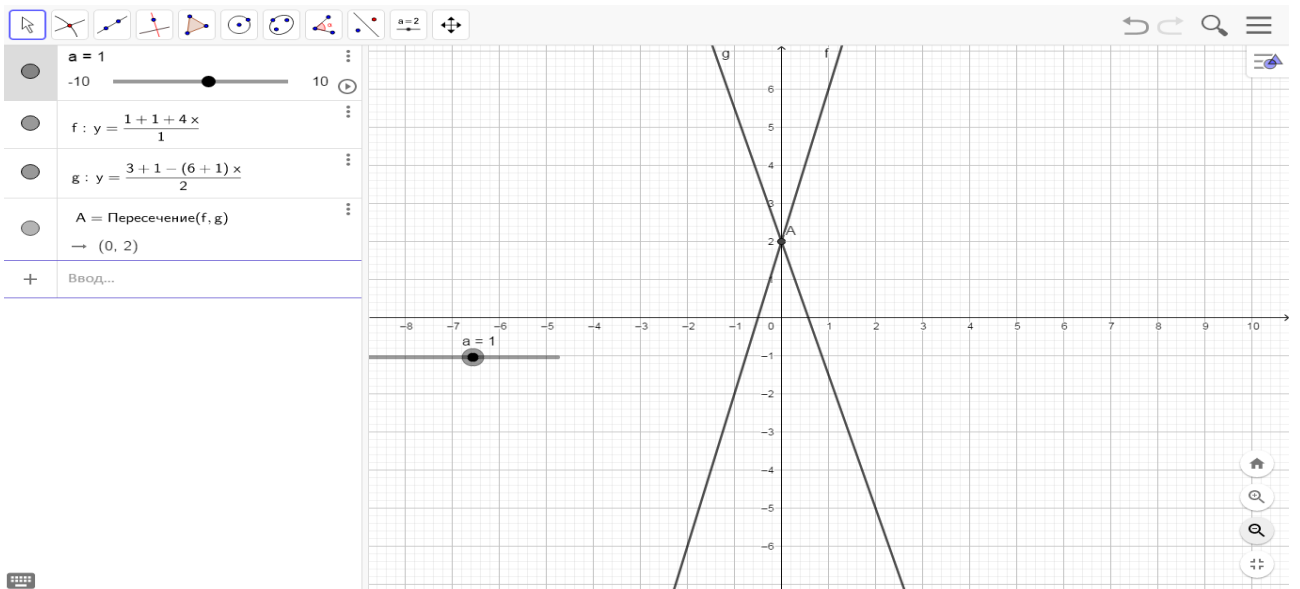


Рис. 3. Зображення точки перетину двох лінійних функцій, що входять до системи рівнянь

в) змінюючи значення параметра  $a$  за допомогою повзунка, розглядаємо різні випадки розміщення прямих.

Якщо  $a = -2$ , то обидва графіка співпадають. Тобто система має безліч розв'язків (рис.4).

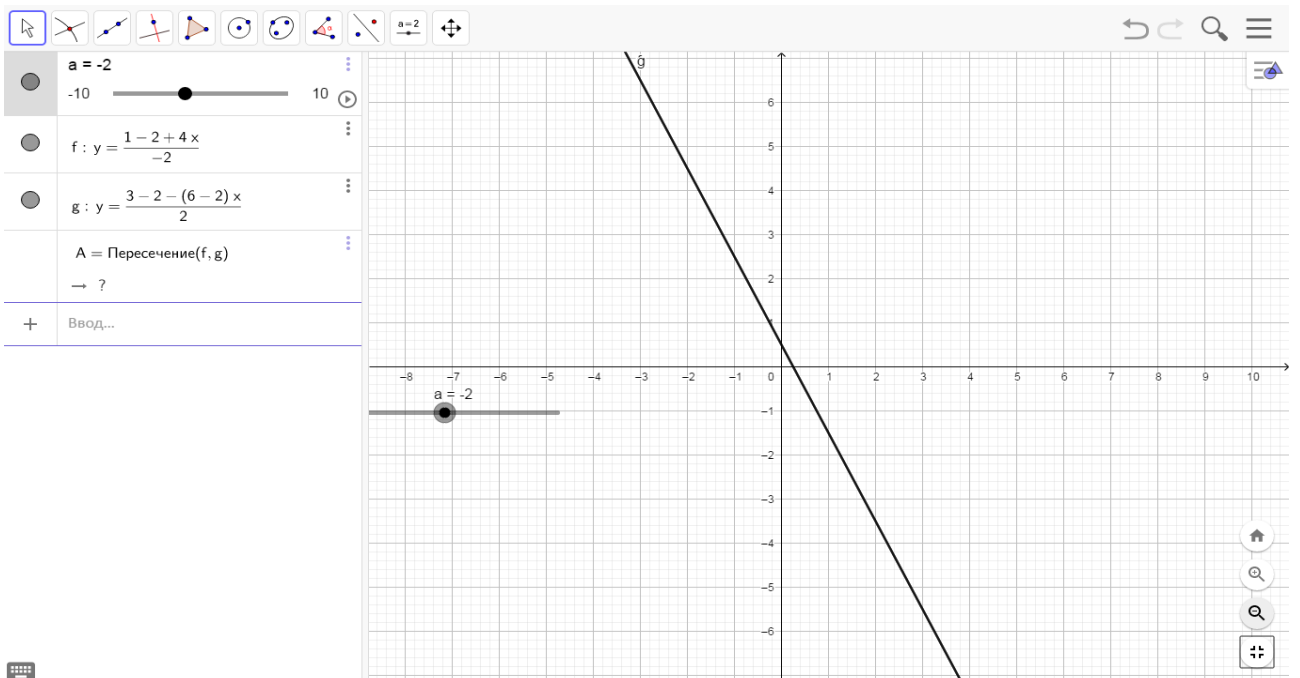


Рис. 4. Дві прями співпали, при  $a=-2$

Якщо  $a = -4$ , то графіки не перетинаються. Тобто система не має розв'язків (рис.5).

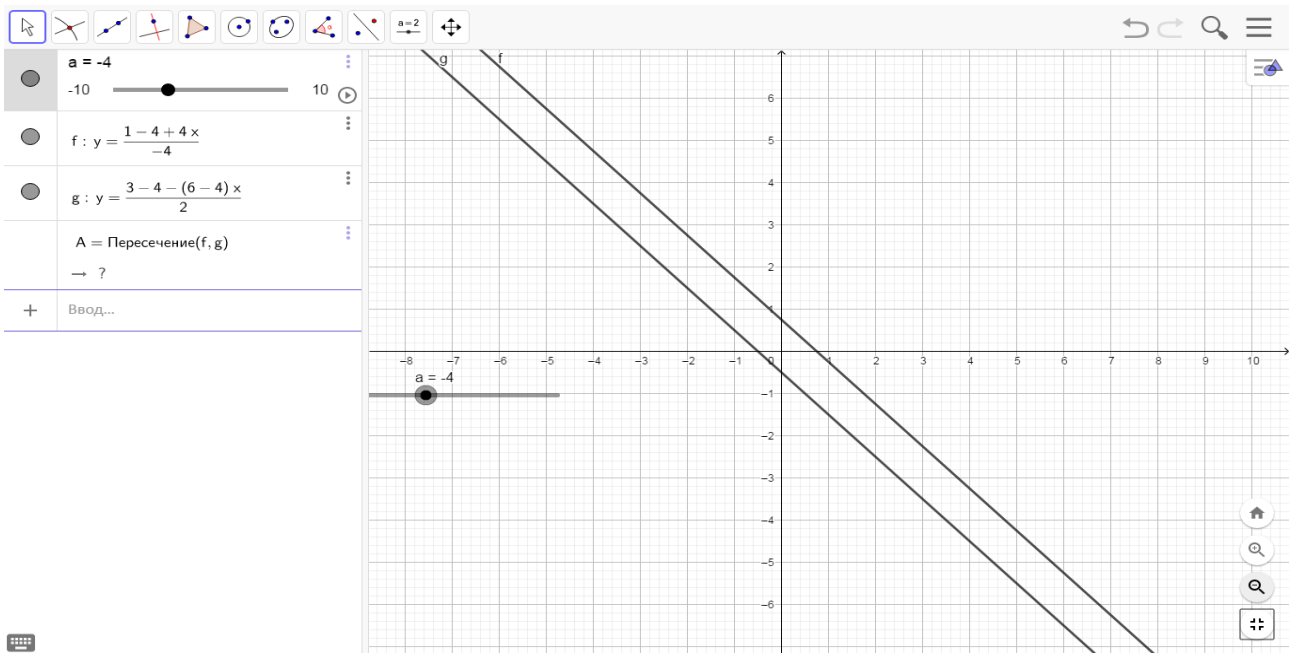


Рис. 5. Дві прямі паралельні, при  $a = -4$

Для всіх інших значень параметра  $a$  графіки лінійних функцій мають одну спільну точку.

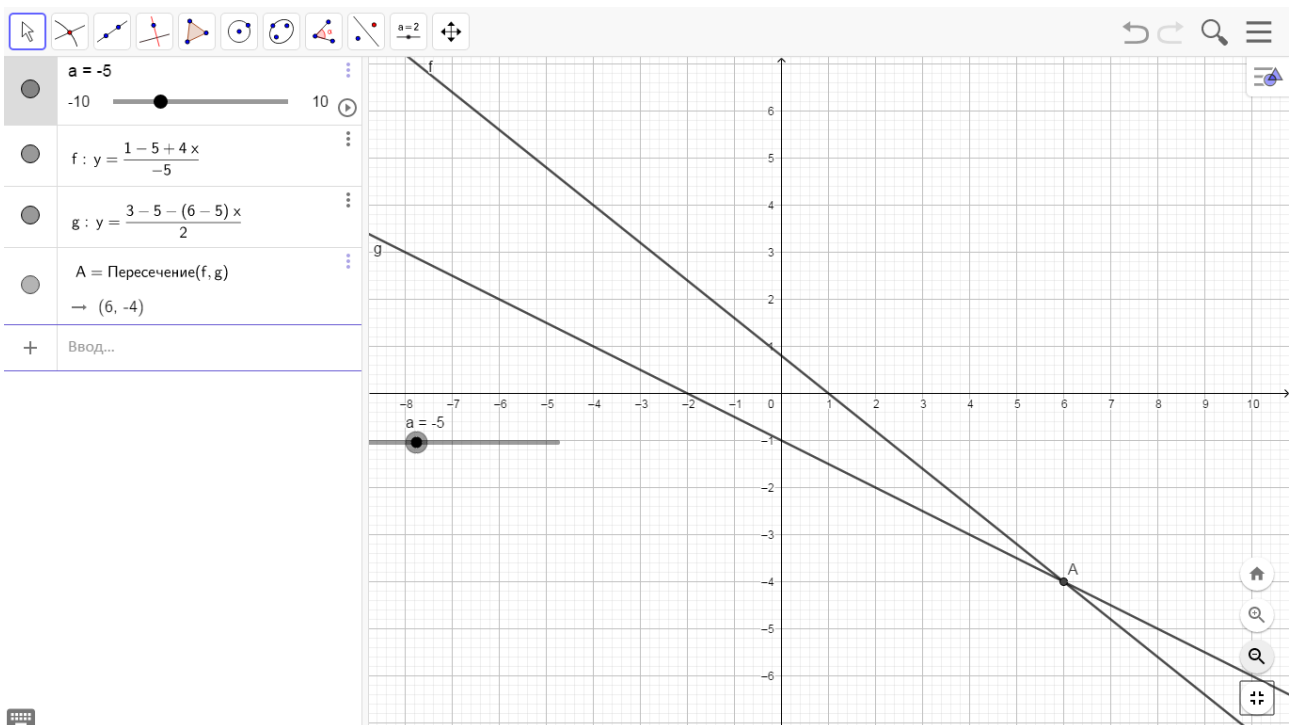


Рис. 6. Дві прямі перетинаються, при  $a \neq -2, a \neq -4$

*Відповідь:* при  $a = -4$  система рівнянь не має розв'язку, при  $a = -2$  система рівнянь має безліч розв'язків, при  $a \neq -4; a \neq -2$  система має єдиний розв'язок.

**Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.** Досвід використання програмного засобу GeoGebra при розв'язуванні рівнянь з параметрами дає позитивні результати. Але важливо пам'ятати, що ІКТ повністю замінити вчителя не можуть, але можуть стати багатофункціональними помічниками вчителя в навчально-виховному процесі.

Використовуючи ІКТ на уроках математики вчитель досягає реалізації таких цілей навчання як розвиток пізнавальних потреб, розвиток навичок та вмінь в експериментально-дослідницькій діяльності, розвиток системного мислення, формування інформаційної культури.

### **Список використаної літератури:**

1. Ботузова Ю.В. Динамічні моделі GeoGebra на уроках математики як основа STEM-підходу// Фізико-математична освіта: науковий журнал. Вип. 3 (17)/ Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2018. С.31-35.
2. Гриб'юк О.О. Психолого-педагогічні вимоги до комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики в контексті підвищення якості освіти// Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди» - Додаток 1 до Вип.31, Том IV (46): Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – Київ: Гнозис, 2013. – С. 110-123.
3. Корольський В.В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. – 324 с.
4. Yunchyk V. Atypical mathematics lessons at school by means of GeoGebra / Yunchyk V.// East - West Conference on Mathematics Education (EWCOME 2016) at the University of Social Sciences and Humanities, Warsaw, Poland, 2016.