УДК 371.512

ПОБУДОВА ЗАДАЧНОЇ СЕРІЇ НА ОСНОВІ НЕСТАНДАРТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Левицький Ярослав

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті проілюстровано побудову інтегративної задачної серії, а саме розкривається послідовність розгляду питань, на яких базується розв'язування нестандартних задач на прямокутний трикутник. Пропонується декілька способів розв'язання. Наведені типові задачі. Робиться висновок про доцільність використання задачних серій на уроках математики

Ключові слова: *інтеграція, задачна серія, нестандартна задача, прямокутний трикутник, спосіб розв'язання.*

Construction of the task series based on the non-standard problem about the rectangular triangle

Ya. Levytskyi

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article illustrates the construction of an integrative task series. The sequence of consideration of the issues is based on solving the non-standard tasks for the rectangular triangle. The typical tasks are given. It is concluded that it is advisable to use problem series in the Math lessons.

Keywords: *integration, problem series, non-standard problem, rectangular triangle, method of solving.*

Постановка проблеми. Геометрія прямокутного трикутника – один із найважливіших розділів планіметрії. Прямокутні трикутники часто використовують при доведенні деяких властивостей фігур і теорем шкільного курсу геометрії. Задачі на трикутник бувають прості і складні. Крім того, є нестандартні задачі, які треба вміти розв'язувати. Типовою задачею стає знаходження усіх лінійних елементів прямокутного трикутника через його площу і периметр. При розв'язуванні даної задачі у багатьох учнів виникають проблеми, пов'язані в першу чергу з тим, що сучасна освіта в цій галузі не може забезпечити розвиток навичок, які б допомогли розв'язати дану задачу і впізнати схожі задачі, розв'язати серію задач на основі даної. Тому є вкрай необхідним виклад матеріалу, який допоможе учням розв'язувати даний тип задач.

Аналіз досліджень і публікацій.

Як зазначає О.В. Погорєлов: "В школе есть два главных предмета – родная речь и геометрия. Одна учит человека грамотно излагать мысли, вторая – дедуктивному мышлению". Для викладання математики у сучасній школі вчителеві слід володіти потужним арсеналом методів та засобів. Важливу роль у цьому відіграють можливості, які надає інтеграція змісту курсу математики та структурних його компонентів. Цим питання присвячені роботи В.А. Кушніра та Р.Я. Ріжняка [5], [6], [7]. Деяким темам прямокутного трикутника присвячені теми Є.Д. Куланіна [3] та І.А. Кушніра [4], де наведено ознаки прямокутного трикутника, його властивості і т.д. Значним внеском у шкільний курс геометрії, зокрема у тему прямокутний трикутник – є праці В.О. Погорєлова [8], який демонструє різноплановість власних задач, звертає увагу на складні речі у задачах. Задачі В.О. Погорєлова вимагають обдумування і приводять до найкращого розуміння геометрії. Виключенням є посібник Л.В. Ізюмченко і Л.А. Ткаченко [2], де наведено дуже багато нестандартних задач (не тільки на прямокутний трикутник). На жаль, на даний момент майже неможливо знайти нашу задачу, проте все зазначене вище надихнуло автора до написання даної статті.

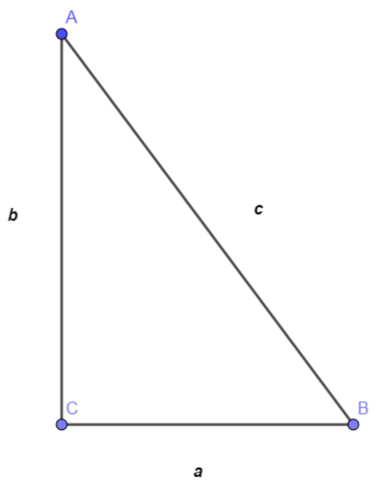

Рис. 1.

Метою статті є розробка задачної серії на основі нестандартної задачі про прямокутний трикутник та опис можливостей її застосування на уроках математики.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Приклад 1. Знайти катети прямокутного трикутника (рис. 1), якщо його площа (S) дорівнює 6 $см^2$, а периметр (P) дорівнює 12 см.

І спосіб.

Розв'язання:

Зобразимо прямокутний трикутник ABC (в ньому невідомі катети і гіпотенуза). Площа прямокутного трикутника: $S = \frac{1}{2}ab$ (половина добутку катетів), за умовою: $S = \frac{1}{2}ab = 6$. Периметр – сума довжин всіх сторін. У нашому випадку: $P = a + b + c = 12$см. Півпериметр – півсума довжин всіх сторін: $p = \frac{P}{2} = \frac{12}{2} =$ 6 см.

$p = \frac{a+b+c}{2} = 6$. В ході логічних міркувань, зрозуміло, що необхідно скористатися формулою: $S = pr$, звідти знайти радіус вписаного кола прямокутного трикутника і вже потім знайти гіпотенузу. Знайдемо радіус вписаного кола: $r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$. У прямокутному трикутнику: $r = \frac{a+b-c}{2} = 1 \rightarrow$ $a + b - c = 2 \rightarrow a + b = 2 + c$. Виразимо $a + b$ із периметра нашого трикутника: $a + b = 12 - c$прирівняємо їх:

$2 + c = 12 - c \rightarrow c = 5(\textit{гіпотенуза})$. Знайдемо катети прямокутного трикутника. Маємо: $ab = 12$ (1) і $a + b + 5 = 12 \rightarrow a + b = 7$ (2). Виразимо а із рівностей (1) і (2), отримаємо: $a = \frac{12}{b}$ (1); $a = 7 - b$ (2). Прирівняємо рівності 1 і 2: $\frac{12}{b} = 7 - b \rightarrow b(7 - b) = 12 \rightarrow b^2 - 7b + 12 = 0 \rightarrow$за теоремою Вієта: $\left[\begin{matrix} b_1 = 3 \\ b_2 = 4 \end{matrix}\right.$ (*Перевірка*: $b_1b_2 = 12\ i b_1 + b_2 = +7$) . Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 і 4 см.

Перевірка: за умовою задачі площа трикутника має дорівнювати 6 $см^2$: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6см^2$, а периметр має дорівнювати 12 см: $3 + 4 + 5 = 12\ см$. Отже, задача розв'язана правильно. *Зауваження.* Корисно, перед тим, як приступати до розв'язання задач даного типажу орієнтуватися в "Піфагорових трійках" – числах (3,4,5 ; 6,8,10 ; 5,12,13 і т.д). Найкраще – мати для себе табличку "Піфагорових трійок", за якою можна швидко визначити сторони прямокутного трикутника, знаючи лише його площу і периметр (зрозуміло, якщо довжини сторін – натуральні числа).

II спосіб.

Розв'язання:

Зобразимо прямокутний трикутник ABC (в ньому невідомі катети і гіпотенуза – рис. 1). $S = \frac{1}{2}ab = 6 \to ab = 12, a + b + c = 12$

За теоремою Піфагора: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, отже: $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12$, маємо систему рівнянь: $\begin{cases} ab = 12 \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12 \end{cases}$, дана система є симетричною. Симетричні системи рівнянь – системи рівнянь з двома невідомими a і b, якщо вони не змінюються при заміні невідомої а через невідому b, а невідомої b через невідому a. Заміна: $\substack{a+b=x \\ ab=y} \to (a + b)^2 = x^2 \to a^2 + 2ab + b^2 = x^2 - 2y \to$ $\begin{cases} y = 12 \\ x + \sqrt{x^2 - 2y} = 12 \end{cases} \to$ маємо ірраціональне рівняння відносно х: $\sqrt{x^2 - 24} = 12 - x$, піднесемо ліву і праву частини до квадрату: $\left(\sqrt{x^2 - 24}\right)^2 = (12 - x)^2 \to x^2 - 24 = 144 - 24x + x^2 \to 24x = 168 \to x = 7$. Повернімося до заміни: $\substack{a+b=7 \\ ab=12}$, виразимо b із обох рівностей: $\substack{b=7-a \\ b=\frac{12}{a}} \to 7 - a = \frac{12}{a} \to a(7 - a) = 12 \to a^2 - 7a + 12 = 0 \to$за теоремою Вієта: $\left[\begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \end{matrix}\right.$($\textit{Перевірка}$: $a_1 a_2 = 12$ $i a_1 + a_2 = +7$) . Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 і 4 см. За теоремою Піфагора: $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$см.

Перевірка: за умовою задачі площа трикутника має дорівнювати 6 $см^2$: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6см^2$, а периметр має дорівнювати 12 см: $3 + 4 + 5 = 12$ *см*. Отже, задача розв'язана правильно.

Дана задача породжує серію задач на розв'язування прямокутних трикутників.

Приклад 2. Знайти радіус вписаного в прямокутний трикутник (рис. 1) кола, якщо площа (S) прямокутного трикутника дорівнює 96$см^2$, а периметр (P) дорівнює 48 см.

Розв'язання:

Зобразимо прямокутний трикутник ABC (в ньому невідомі катети і гіпотенуза). Площа прямокутного трикутника: $S = \frac{1}{2}ab$ (половина добутку катетів), за умовою: $S = \frac{1}{2}ab = 96$. Периметр – сума довжин всіх сторін. У нашому випадку: $P = a + b + c = 48$см. Півпериметр – півсума довжин всіх сторін: $p = \frac{P}{2} = \frac{48}{2} = 24$ см.

$p = \frac{a+b+c}{2} = 24$. В ході логічних міркувань, зрозуміло, що необхідно скористатися формулою: $S = pr$, звідти знайти радіус вписаного кола прямокутного трикутника і вже потім знайти гіпотенузу. Знайдемо радіус вписаного кола: $r = \frac{S}{p} = \frac{96}{24} = 4$. (На цьому кроці задача розв'язана, проте, ми знайдемо сторони трикутника і за формулою: $r = \frac{a+b-c}{2}$ дійсно переконаємося, що радіус вписаного кола у даному прямокутному трикутнику 4 см). У прямокутному трикутнику: $r = \frac{a+b-c}{2} = 4 \rightarrow a + b - c = 8 \rightarrow a + b = 8 + c$. Виразимо $a + b$ із периметра нашого трикутника: $a + b = 48 - c$ прирівняємо їх: $8 + c = 48 - c \rightarrow c = 20($*гіпотенуза*$)$. Знайдемо катети прямокутного трикутника. Маємо: $ab = 192(1)$ і $a + b + 20 = 48 \rightarrow a + b = 28\,(2)$. Виразимо а із рівностей (1) і (2), отримаємо: $a = \frac{192}{b}$ (1); $a = 28 - b$ (2). Прирівняємо рівності 1 і 2: $\frac{192}{b} = 28 - b \rightarrow b(28 - b) = 192 \rightarrow b^2 - 28b + 192 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow b^2 - 12b - 16b + 192 = 0 \rightarrow$згрупуємо доданки: $b^2 - 12b - 16b + 192 = b(b - 12) - 16(b - 12) = (b - 12)(b - 16) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = 12 \\ b_2 = 16 \end{array}\right.$ (умова рівності добутку нулю) - катети нашого прямокутного трикутника.

Перевірка: за умовою задачі площа трикутника має дорівнювати $96см^2$: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96см^2$, а периметр має дорівнювати 48 см: $12 + 16 + 20 = 48\,см$. Чи дорівнює радіус вписаного кола 4? Перевіримо: $r = \frac{12+16-20}{2} = 4$. Отже, задача розв'язана правильно.

Приклад 3. Знайти довжину кола описаного навколо прямокутного трикутника (рис. 1) з площею (S) 30 $см^2$і периметром (P) 30 см.

Розв'язання:

Зобразимо прямокутний трикутник ABC (в ньому невідомі катети і гіпотенуза). Площа прямокутного трикутника: $S = \frac{1}{2}ab$ (половина добутку катетів), за умовою: $S = \frac{1}{2}ab = 30$. Периметр – сума довжин всіх сторін. У нашому випадку: $P = a + b + c = 30$см. Півпериметр – півсума довжин всіх сторін: $p = \frac{P}{2} = \frac{30}{2} = 15$ см.

$p = \frac{a+b+c}{2} = 15$. В ході логічних міркувань, зрозуміло, що необхідно скористатися формулою: $S = pr$, звідти знайти знайти гіпотенузу, а потім знайти радіус описаного кола. Знайдемо гіпотенузу прямокутного трикутника: $r = \frac{S}{p} = \frac{30}{15} = 2$. У прямокутному трикутнику: $r = \frac{a+b-c}{2} = 2 \rightarrow a + b - c = 4 \rightarrow a + b = 4 + c$. Виразимо $a + b$ із периметра нашого трикутника: $a + b = 30 - c$ прирівняємо їх: $4 + c = 30 - c \rightarrow c = 13$ (*гіпотенуза*). Тепер знайдемо радіус описаного кола: $R = \frac{c}{2}$ (у прямокутному трикутнику) $\rightarrow R = \frac{c}{2} = \frac{13}{2}$. Довжина кола: $C = 2\pi R = 2\pi \times \frac{13}{2} = 13\pi$ см. (Далі зовсім не обов'язково знаходити катети даного прямокутного трикутника, як наведено вище у прикладах. На цьому кроці задача розв'язана).

Перевірка: використаємо формулу: $S = \frac{abc}{4R} \rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{60\times13}{4\times30} = \frac{60\times13}{2\times60} = \frac{13}{2}$, задача розв'язана правильно.

Приклад 4. Знайти відношення синусів гострих кутів прямокутного трикутника (рис. 1), площа(S)якого дорівнює 24$см^2$, а периметр(P) 24 см.

Розв'язання:

Зобразимо прямокутний трикутник ABC (в ньому невідомі катети і гіпотенуза). Площа прямокутного трикутника: $S = \frac{1}{2}ab$ (половина добутку катетів), за умовою: $S = \frac{1}{2}ab = 24$. Периметр – сума довжин всіх сторін. У нашому випадку: $P = a + b + c = 24$ см. Півпериметр – півсума довжин всіх сторін: $p = \frac{P}{2} = \frac{24}{2} = 12$ см.

В ході логічних міркувань, зрозуміло, що необхідно скористатися формулою: $S = pr$, звідти знайти знайти гіпотенузу, а потім знайти катети. Знайдемо гіпотенузу прямокутного трикутника:

У прямокутному трикутнику: $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2 \rightarrow a + b - c = 4 \rightarrow a + b = 4 + c$.

Виразимо $a + b$ з периметра нашого трикутника: $a + b = 24 - c$прирівняємо їх: $4 + c = 24 - c \rightarrow c = 10(\textit{гіпотенуза})$. Знайдемо катети прямокутного трикутника. Маємо: $ab = 48$ (1) і $a + b + 10 = 24 \rightarrow a + b = 14$ (2). Виразимо а із рівностей (1) і (2), отримаємо: $a = \frac{48}{b}$ (1); $a = 14 - b$ (2). Прирівняємо рівності 1 і 2: $\frac{48}{b} = 14 - b \rightarrow b(14 - b) = 48 \rightarrow b^2 - 14b + 48 = 0 \rightarrow$за теоремою Вієта: $\left[\begin{matrix} b_1 = 6 \\ b_2 = 8 \end{matrix}\right. (\textit{Перевірка}: b_1 b_2 = 48\, i b_1 + b_2 = -14)$. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Позначимо ці катети. Нехай $a = 6$ *см*, а $b = 8$ *см*. Гострими кутами в даному випадку є: ∠A і ∠B, знайдемо значення цих кутів. ∠A: $\sin\angle\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$∠B: $\sin\angle\mathrm{B} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

Необхідно знайти відношення синусів гострих кутів прямокутного трикутника: $\frac{\sin\angle\mathrm{A}}{\sin\angle\mathrm{B}} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Перевірка: за умовою площа прямокутного трикутника дорівнює 24. Знайдемо її, використовуючи формулу двічі: $S = \frac{1}{2}absin\angle\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{3}{5} = 24\textit{см}^2 S = \frac{1}{2}absin\angle\mathrm{B} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{4}{5} = 24\ \textit{см}^2$. Отже, задача розв'язана правильно.

Приклад 5. Знайти висоту прямокутного трикутника (рис. 1), проведену до гіпотенузи, якщо площа (S) прямокутного трикутника дорівнює $6\textit{см}^2$, а периметр (P) дорівнює 12 см.

Знайшовши сторони прямокутного трикутника (катети і гіпотенузу) , див. вище (приклад 1), як саме були знайдені ці сторони, знайдемо висоту прямокутного трикутника із формули: $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4\ \textit{см}$

Перевірка: за умовою площа трикутника має дорівнювати $6см^2$, знайдемо площу трикутника, використовуючи формулу: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{12}{5} = 6см^2$.

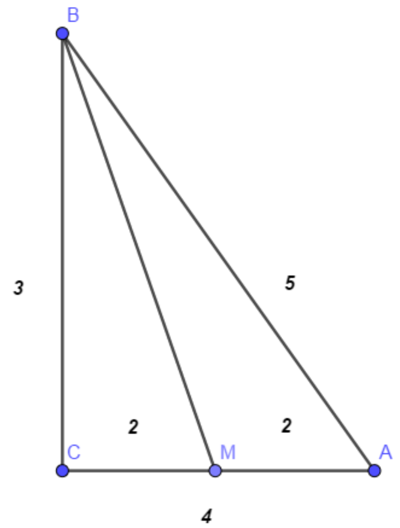

Рис. 2.

Усе вірно, висота знайдена правильно.

Приклад 6. Обчислити добуток медіан прямокутного трикутника (рис. 2), площа (S) якого дорівнює $6см^2$, а периметр (P) дорівнює 12 см.

Знайдемо сторони трикутника, див. вище (приклад 1), як саме були знайдені ці сторони. Маємо прямокутний трикутник ABC, проведемо медіану трикутника BM. Медіана трикутника ділить сторону трикутника навпіл, отже, $CM = AM = 2\ см$.

Із прямокутного трикутника BCM за теоремою Піфагора:

$BM = m_{AC} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Перевірка: використаємо формулу: $m_{AC}^2 = \frac{2BC^2+2AB^2-AC^2}{4} = \frac{2\cdot 9+2\cdot 25-16}{4} = 13$, звідки $m_{AC} = \sqrt{13}$ – усе вірно.

Для інших медіан аналогічно (рис. 3, 4). Примітка: у даному випадку найлегше знайти медіану, проведену до сторони AB, ця медіана дорівнюватиме половині AB, тобто $CM_1 = \frac{AB}{2} = 2.5$. Медіана $AM_2 = \frac{\sqrt{73}}{2}$. Обчислимо добуток медіан трикутника: $BM \cdot CM_1 \cdot AM_2 = \sqrt{13} \cdot 2.5 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{949}$

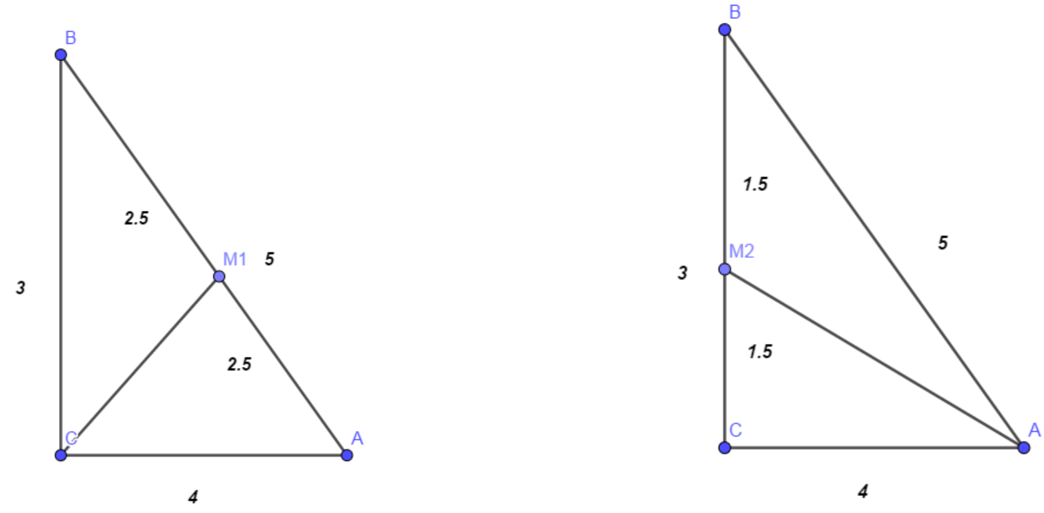

Рис. 3, 4.

Відповідь: $\frac{5}{2}\sqrt{949}$

Приклад 7.Обчислити добуток бісектрис прямокутного трикутника (рис. 5), площа(S) якого дорівнює $6см^2$, а периметр(P) дорівнює 12 см.

Знайдемо сторони трикутника , див. вище(приклад 1), як саме були знайдені ці сторони. Маємо прямокутний трикутник ABC, проведемо бісектрису трикутника BL. Нехай $CL = x$, тоді $AC = 4 - x$:

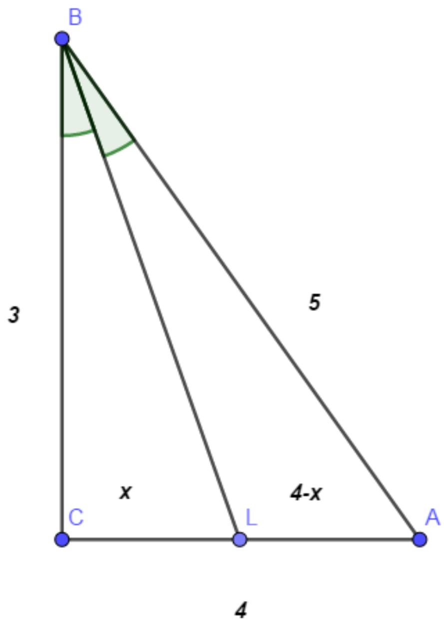

Рис. 5.

Бісектриса BL поділила протилежну сторону AC на частини пропорційні прилеглим сторонам трикутника (властивість бісектриси): $\frac{CB}{CL} = \frac{AB}{AL} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{4-x}$, звідки $x = \frac{3}{2} \rightarrow CL = \frac{3}{2}$, тоді $AC = 4 - \frac{3}{2} = 2.5$

Знайдемо бісектрису BL:

$BL^2 = \mathrm{BC}^2 + CL^2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Для інших бісектрис обчислення проводяться аналогічно:

$AL_1 = \frac{4\sqrt{10}}{3} і CL_2 = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ відповідно. Звідки добуток усіх трьох бісектрис трикутника: $BL \cdot AL_1 \cdot CL_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{12\sqrt{2}}{7} = \frac{240}{7} = 34\frac{2}{7}$

Відповідь: $34\frac{2}{7}$

Висновки. Таким чином, з’ясування особливостей розв’язування серії задач, породжених нестандартною задачею про прямокутний трикутник, нами проводилося з використанням технології інтеграції змісту математичного матеріалу та його структурних компонентів. В результаті нами розроблена методика розв’язування таких задач. Апробація розробленої методики засвідчила доцільність використання задачних серій при навчанні математики.

Подяки. Автор висловлює подяку за високий професіоналізм, небайдужість і цінні поради своєму шкільному вчителю – Бойку Пилипу Івановичу.

Список використаної літератури

1. Апостолова, Г. Геометрия – 9: двухуровн. учеб для общеобразоват. учебн. завед.: Пер. с укр. / Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2009. – 304 с.: ил.
2. Ізюмченко Л., Ткаченко Л. Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (планіметрія) / Л. В. Ізюмченко, Л. А. Ткаченко. – Кропивницький: КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», 2017. – 100 с.
3. Куланин Е. Геометрия треугольника в задачах : уч. пос. для 8-9 кл. физико-мат. направления / Е.Д. Куланин, С.Н. Федин. – М., 1990. – 145 с.
4. Кушнир И. Геометрия 7–9. Школа боевого искусства : сборник задач / И. Кушнир, Л.Финкельштейн. – К.: Факт, 2000. – 384 с.
5. Кушнір В., Ріжняк Р. Інноваційні методи навчання математики // Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.
6. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв’язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп’ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
7. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові записки КДПУ ім. В.Винниченка. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2010 – с. 156-161.
8. Погорелов А. «Избранные труды: в 2 т. Т.1. Геометрия "в целом" / Алексей Васильевич Погорелов. – Київ: Наукова думка, 2008 . – 415 с.