УДК 372.851

ОСОБЛИВОСТІ ТА МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ» В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Крикотненко Ірина

Науковий керівник:кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри Гаєвський М.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто особливості та методику викладання теми“Метод математичної індукції”у старшій школі. Зокрема, розглянуто обґрунтовано застосування цієї теми на уроках математики в профільних класах та, можливо, факультативно, наведено приклади розв’язування різнорівневих задач, у тому числі і олімпіадних.

Ключові слова: аксіоми Пеано, метод математичної індукції, подільність.

SPESIFICS METHODOLOGY FOR STUDYING THE TOPIC «METHOD OF MATHEMATICAL INDUCTION» IN OLD SCHOOL

Krykotnenko Irina

Scientific adviser: candidate of physical and mathematical sciences, lecturer Haievskyi M.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The article deals with the peculiarities and methods of teaching the topic "Method of mathematical induction" in high school. In particular, the application of this topic in mathematics lessons in profile classes is considered and, optionally, examples of solving multi-level problems, including Olympiads, are given.

Keywords: Peano axioms, mathematical induction method, divisibility.

Актуальність. Метод математичної індукції не входить до обов’язкового вивчення у середній школі, дана тема входить до змісту підручників профільного та поглибленого рівня. Ясно, що цей факт не дає змоги учням, що навчаються за рівнем стандарт і цікавляться математикою на достатньому рівні брати участь у математичних олімпіадах і конкурувати там із учнями, у котрих відведено більшу кількість годин на вивчення математики. Також, враховуючи, що дана тема не входить до програми ЗНО з математики, більшість вчителів у кращому випадку ознайомлюють учнів з нею хоча б оглядово.

Мета та завдання. Метою статті є дослідження особливостей та методики викладання теми " Метод математичної індукції " у старшій школі, а також вивчення основних типів задач із застосуванням принципу математичної індукції.

Постановка проблеми. Метод математичної індукції займає важливе місце в математиці. В курсі алгебри та числових систем, що вивчаються студентами-математиками, на основі нього будується аксіоматична теорія натуральних чисел. В шкільному курсі математики даний принцип є ключовим при встановленні фактів подільності, доведення нерівностей тощо.

Виклад основного матеріалу.

Нехай деяке твердження справедливе в кількох окремих випадках. Розгляд усіх інших випадків або взагалі неможливий, або потребує розгляду великої кількості випадків. Як же дізнатися, чи буде правильним твердження в усіх можливих випадках? Це питання іноді вдається розв'язати, використавши особливий метод міркувань, який називається методом математичної індукції, див., наприклад, [1, 2]. Основна заслуга в розробці цього методу належить французьким математикам Блезу Паскалю (1623-1662) і Рене Декарту (1596-1650), а також швейцарському математику Якобу Бернуллі (1654-1705).

В основі методу математичної індукції лежить твердження, яке називається ***принципом математичної індукції:***

Деяке твердження правильне при будь-якому натуральному n, якщо:

1) при $n = 1$ воно правильне;

2) із правильності цього твердження при будь-якому k слідує, що воно правильне і при $k + 1$.

Позначимо $P(n)$ твердження, яке залежить від натурального числа n.

Доведення методом математичної індукції проводиться за таким алгоритмом:

1) перевірити правильність твердження $P(1)$;

2) припустити, що правильним є твердження$P(k), k \geq 1$;

3) довести, використовуючи це припущення, що правильним буде твердження $P(k+1)$;

4) зробити висновок, що за принципом математичної індукції твердження P(n) правильне для будь-якого $n \in N$.

Перший крок алгоритму називається початком індукції, другий крок – припущенням індукції, а третій – індуктивним кроком.

З'ясуємо основу цього методу.

Поняття натурального числа часто вважається очевидним, таким, що не потребує пояснення. В сучасній математиці не допускається використання таких само собою очевидних понять. Кожне поняття повинно бути означене на основі раніше означених понять. Для арифметики основними поняттями є: одиниця, натуральне число і " слідувати за", а основними властивостями цих понять – аксіоми, сформульовані італійським математиком Джузеппе Пеано (1858-1932). Ці аксіоми такі:

1) для кожного натурального числа n існує одне і тільки одне натуральне число, що слідує за ним. Це число прийнято позначати $n^{\prime}$ або $n+1$

2) одиниця є натуральним числом, причому вона не слідує ні за яким натуральним числом;

3) жодне натуральне число не слідує за двома різними натуральними числами;

4) якщо множина А містить одиницю і разом з кожним числом k містить наступне за ним число $k^{\prime}$ або $k+1$, то А містить всі натуральні числа.

Четверту аксіому Пеано називають аксіомою математичної індукції – саме на ній оснований метод математичної індукції.

Метод математичної індукції застосовується при розв'язуванні задач на подільність; задач на знаходження сум; при доведенні тотожностей і нерівностей. За допомогою цього методу можна вивести формули n-го члена і суми перших n членів арифметичної і геометричної прогресій. Серед вправ зустрічаються також задачі, пов'язані з рекурентним способом задання послідовності.

Приклад 1.Вивести і довести формулу для обчислення суми $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n (2n - 1)$.

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{aligned} S_1 &= -1; \\ S_2 &= -1 + 3 = 2; \\ S_3 &= -1 + 3 - 5 = -3; \\ S_4 &= -1 + 3 - 5 + 7 = 4, \end{aligned}$$

то виникає гіпотеза , що $S_n = (-1)^n n$.

Доведемо це методом математичної індукції.

1)*База індукції.* Істинність рівності , коли $n = 1$, вже встановлено.

2*) Індуктивний перехід*. Припустимо, що коли $n = k$, сума $S_k = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^k (2k - 1)$ обчислюється за формулою $S_k = (-1)^k k$.

Доведемо, що сума $S_{k+1} = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^k (2k - 1) + (-1)^{k+1} (2k + 1)$ можна обчислити за формулою $S_{k+1} = (-1)^{k+1} (k + 1)$.

Справді

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1}(2k+1) = (-1)^k k + (-1)^{k+1}(2k) + (-1)^{k+1} = (-1)^k (k - 2k - 1) = (-1)^{k+1}(k+1).$$

Отже , твердження істинне при $n = 1$, а з його істинності при $n = k$, випливає його істинність при $n = k + 1$. За принципом математичної індукції , припущення істинне при всіх натуральних n .

Приклад 2. Вивести та довести формулу для обчислення суми $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, де $n \in N$.

Розв'язання.

Для $n = 1$: $S_1 = 1^3 = 1$,

для $n = 2$; $S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$;

для $n = 3$: $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$;

для $n=4: S_4=1^3+2^3+3^3+4^3=100=(1+2+3+4)^2$.

Тепер можна зробити таке припущення : $S_n=(1+2+3+...+n)^2$.

Враховуючи, що відома формула для знаходження суми перших натуральних чисел, дану формулу можна записати таким чином :

$$S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Справедливість формули для $n=1$ було встановлено вище. Нехай дана формула справедлива для $n=k$, тобто $S_k=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

Маємо:

$$S_{k+1}=1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(\frac{k(k+1)^2}{2})+(k+1)^3=$$

$$+(k+1)^2\left(\frac{k^3}{4}+k+1\right)=\frac{(k+1)^2+(k+2)^2}{4}=(\frac{(k+1)(k+2)}{2})^2.$$

Отже, твердження істинне при $n=1$, а з його істинності при $n=k$, випливаэ його істинність при $n=k+1$.

За принципом математичної індукції , припущення істинне при всіх натуральних n.

При вивченні даної теми із учнями доцільно підібрати для заняття різнорівневі завдання, щоб на прикладах від «простого до складного» учні краще зрозуміли суть та принципи використання методу математичної індукції. З більшістю типових задач на метод математичної індукції можна ознайомитися, наприклад, у [3, 4].

Зокрема, при розгляді задач на подільність, доречним є повторення ознак подільності чисел на 2,3, 9,10, а також формул розкладів виразів b^n+a^n, якщо число n - непарне та формули b^n-a^n, якщо n - довільне число. Типовим прикладом є, наприклад, така вправа:

Вправа. Довести, що $(6^{2n-1}+1)$ кратне 7, $n\in N$.

Доведення. 1)*База індукції*. Якщо $n=1$, то маємо: $6^{2-1}+1=6+1=7\vdots 7$.

2) *Індукційний перехід*. Припустимо, що коли $n=k$ вираз $(6^{2k-1}+1)\vdots 7$ і доведемо, що вираз кратний 7 при $n=k+1$.

$$\left(6^{2(k+1)-1}+1\right)=6^{2k+2-1}+1=6^2\cdot 6^{2k-1}+1=6^{2k-1}(35+1)+1=\underbrace{6^{2k-1}\cdot 35}_{\vdots 7}+\underbrace{\left(6^{2k-1}+1\right)}_{\vdots 7}.$$

Отже, $(6^{2k+1}+1)\vdots 7.$ Твердження доведено для всіх $n\in N.$

II спосіб.. Дане твердження можна було довести , використавши відому формулу для розкладу a^m+b^m, якщо число m - непарне.

$\left(6^{2n-1}+1\right)=(6+1)\left(6^{2n}+\ldots+1\right)=7\left(6^{2n}+\ldots+1\right)\vdots 7$. [4]

Для вироблення вмінь та навиків учнів доцільно зробити поділ класу на три групи, при цьому можна застосувати інтерактивні технології та елементи змагання. Пояснювати розв'язання вправи буде один із групи.

Завдання для першої групи

Відомо, що $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ при $n\geq 1$. Знайдіть a_n.

Розв'язання

$a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=15$, $a_5=31$.

Помічаємо, що $a_1=2^1-1$, $a_2=2^2-1$, $a_3=2^3-1$, $a_4=2^4-1$, $a_5=2^5-1$.

Виникає гіпотеза $a_k=2^k-1$.

Перевіримо крок індукції: $a_{k+1}-2a_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$.

Отже, на основі принципу математичної індукції для кожного натуральногon $a_n=2^n-1$.

Завдання для другої групи

Доведіть, що при кожному натуральному n стверджується рівність

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Розв'язання

Якщо $n=1$, то$1=1^2$.

Припустимо, що при $n=k$, рівність$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ правильна.

Якщо$n=k+1$,то$1+3+\ldots+(2k-1)+2(k+1)-1=k^2+2(k+1)-1=(k+1)^2$.

Індуктивний перехід правильний, а тому рівність доведено.

Завдання для третьої групи

Доведіть, що для кожного натурального n вираз$5^{2n+1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ ділиться на 19.

Розв'язання

Якщо $n = 1$, то$5^3 - 2^2 + 3^3 - 2^3$ ділиться на 19.

Нехай при $n = k$ $5^{2k+1} - 2^{k+1} + 3^{k+2} - 2^{2k+1}$ ділиться на 19.

Доведемо, що при $n = k+1$ твердження також правильне, тобто, що $5^{2k+3} - 2^{k+2} + 3^{k+3} - 2^{2k+3}$ ділиться на 19.

$$5^{2k+3}\cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} - 2^{2k+3} = 50\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+1} + 12\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1} =$$
$$= 12(5^{2k+1}\cdot 2^{k+1} + 3^{k+2}\cdot 2^{k+1}) + 38\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+1}.$$

Перший доданок суми ділиться на 19 за припущенням, другий доданок, очевидно, ділиться на 19, тому вся сума ділиться на 19. Отже, твердження задачі справедливе для всіх натуральних *n.*

При сприятливому засвоєнні матеріалу, додатково можна розглянути наступні вправи:

Вправа. Довести, що $(5^n - 3^n + 2n) \vdots 4$.

Вправа. Довести, що число 11….1 (3^n одиниць) ділиться на 3^n. (Завдання олімпіадного рівня)

Доведення. 1)*База індукції.* Якщо $n = 1$, то число 111 ділиться на 3 (за ознакою подільності на 3).

Якщо $n = 2$, то число 111 111 111 ділиться на 9 (за ознакою подільності на 9).

Або 111 111 111 = 111*1001001. Кожен з множників ділиться на 3, а тому добуток ділиться на 9.

Якщо $n = 3$, то число 111…1 (27 одиниць) ділиться на 27, бо його можна представити $\underbrace{1...1}_{27} = \underbrace{1...1}_{9} \cdot 1\underbrace{0...0}_{8}1\underbrace{0...0}_{8}1$. Перший множник ділиться на 9, а другий - на 3, тому число ділиться на 27.

2*) Індуктивний перехід.* Припустимо, що коли $n = k$, то число $\underbrace{11...1}_{3^n}$ ділиться на 3^n і доведемо , що число $\underbrace{11...1}_{3^{n+1}}$ ділиться на 3^{n+1}.

Виконаємо перетворення: $\underbrace{11...1}_{3^{n+1}} = \underbrace{11...1}_{3^n} \cdot 10...010...01$. Перший множник ділиться на 3^n за індуктивним припущенням, а другий – на 3(за ознакою подільності), тому добуток ділиться на 3^{n+1}.

За принципом математичної індукції, істинність твердження доведена для всіх натуральних n.

Висновки. Вивчення теми «Метод математичної індукції» є важливою та доступною для дітей старших класів. Розв’язування задач прикладного змісту, які виникають не лише в математиці, а й поза її межами, сприяє посиленню гнучкості та системності навчання учнів. Крім ого, засвоєння учнями цього матеріалу дасть змогу учням більш успішно брати участь у олімпіадних змаганнях з математики.

Аналіз досліджень. Подальші дослідження цієї теми можуть бути пов’язані із дослідженням застосування методу математичної індукції у геометрії, аналізі, теорії функціональних рівнянь тощо. Це матиме позитивний вплив на теоретичні та практичні знання, уміння та навички учнів старшої школи.

Список літератури

1. ВивальнюкЛ. М., ГригоренкоВ. К., ЛевіщенкоС. С. Числові системи./ Л. М.Вивальнюк, В. К.Григоренко, С. С. Левіщенко— К.: Вища шк., 1988.— 272 с.
2. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. Алгебра и теория чисел. Ч. 1. / С.Т.Завало, В.Н.Костарчук, Б.И. Хацет— К.: Вища шк., 1977.— 400 с.
3. Мерзляк А.Г. Алгебра. Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А.Г.,Полонський В.Б. ,Якір М.С. –Харків: Гімназія, 2009. -378 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра. 10 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.