УДК 512.552.1

СТРУКТУРА ДЕЯКИХ ТИПІВ БАГАТОРЯДНИХ КІЛЕЦЬ

Шторфунова Ганна

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Яременко Ю.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Теорія кілець є однією з тих наук, які досить бурхливо розвиваються. Щорічно з теорії кілець публікуються десятки статей, захищаються дисертації.

В статті розглядаються основні факти теорії напівдосконалих кілець та модулів над ними, та основні леми і теореми теорії багаторядних кілець, які є узагальненням напівланцюгових та бірядних кілець. Використовуючи теорему про вигляд сагайдаків нетерових багаторядних кілець, побудовано всі можливі трьохточкові сагайдаки таких кілець. Описано мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець, які відповідають побудованим сагайдакам.

Ключові слова: кільце, модуль, пірсовський розклад, сагайдак, багаторядне кільце.

The Structure of Some Types of Multiserial Rings

Anna Shtorfunova

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent of mathematics chair Yaremenko Y.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The theory of rings is one of those sciences that are developing quite rapidly. Annually dozens of articles about the theory of the rings are published and the dissertations are defended.

This article deals with the basic facts of the theory of semi-perfect rings and the modules above them, as well as the main lemmas and theorems of the theory of multiserial rings, which are generalizations of serial and biserial rings. Using the theorem on the view of quiver of noetherian multiserial rings, all possible three-point quivers of such rings are constructed. The third-order minor-row of noetherian multiserial rings corresponding to the constructed quivers are described.

Keywords: ring, module, peirce decomposition, quiver, multiserial ring.

Постановка проблеми. Вивчити основні факти теорії напівдосконалих кілець. Розглянути теорію багаторядних кілець, зокрема мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець.

Аналіз досліджень і публікацій. Поняття артинового бірядного кільця введено Фуллером в роботі [25] у зв'язку з вивченням кілець дистрибутивно модульного типу. У роботі [5] розглядаються напівдосконалі бірядні кільця без будь-яких обмежень скінченності. Тут вказана будова спадкових, напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей. У роботі [1] введено поняття бірядного сагайдака. В роботах [7; 10; 11; 12; 13; 14; 20] вивчаються властивості нетерових бірядних кілець, та описані їх мінори другого, третього та четвертого порядку.

В роботі [8] введено поняття багаторядного кільця. У роботі [19] введено поняття багаторядного сагайдака.

Вивченню різних типів багаторядних кілець, їх властивостей та побудові сагайдаків цих кілець присвячено роботи [15; 16; 17; 18; 19; 20; 21].

Мета статті – описати мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Розглядаються асоціативні кільця з $1\neq0$.

Елемент $e^2=e\in A$ називається і*демпотентом*. Два ідемпотенти e і f називаються *ортогональними*, якщо $ef=fe=0$.

Рівність $1=e_1+\ldots+e_n$,, де $e_1,\ldots,e_n$ – ідемпотенти кільця A, називається розкладом одиниці кільця A.

Твердження 1 [3, 9]. *Якщо* $1=e_1+\ldots+e_n$ *– розклад одиниці кільця* A *, то* $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_iA$ $(A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ *– розклад кільця* A *в пряму суму правих (лівих) ідеалів* e_iA (Ae_i).

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A. Тоді можна записати $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} e_iae_j$. Отроимаємо розклад кільця A в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n)$. Елементи із e_iAe_j позначимо через a_{ij}. Тоді будь-який елемент $a\in A$ зручно записати у вигляді матриці. Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення матриць:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_2 & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_t \end{bmatrix}$$

Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* [2, 31].

Модуль *M* називається *артиновим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить мінімальний елемент.

Модуль *M* називається *нетеровим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний елемент.

Твердження 2 [3, 18]. *Модуль M є нетеровим (артиновим) тоді і лише тоді, коли кожен зростаючий (спадаючий) ланцюжок його підмодулів стабілізується.*

Нехай *M* – артиновий модуль. Тоді, очевидно, будь-який його підмодуль *N* – артиновий і фактор-модуль *M/N* також артиновий. Аналогічно, для нетерового модуля.

Кільце *A* називається *артиновим (нетеровим) справа,* якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Наприклад, кільце цілих чисел є нетеровим, але не артиновим.

Теорема 1 [3, 48]. *Якщо кільце A нетерове (артинове) справа, то кільця eAe і fAf – нетерові, (артинові) справа, fAf* - *модуль eAf та eAe* - *модуль fAe – скінченнопороджені. Навпаки, якщо ці умови виконуються для деяких ідемпотентів e і f∈A таких, що e+f=1, то кільце A – нетерове (артинове) справа.*

Радикалом Джекобсона R кільця *A* називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Кільце *A* називається *локальним*, якщо у нього всього один максимальний правий ідеал.

Тоді цей ідеал є радикалом Джекобсона *R* кільця *A,* тому у кільця *A* всього один максимальний лівий ідеал.

Кільце A називається *напівлокальним*, якщо факторкільце $\bar{A}=A/R$ артинове справа.

Ідемпотент $e \in A$ називається *локальним,* якщо кільце eAe локальне.

Ідемпотенти можна піднімати за модулем ідеала I, якщо з того, що $q^2 - q \in I$ $(q \in A)$, випливає існування ідемпотента $e^2 = e \in A$ такого, що $e - q \in I$.

Напівлокальне кільце A називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A [22].

Теорема 2 [3, 33]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли його одиниця розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів*.

Напівдосконале кільце A називається *зведеним,* якщо факторкільце A/R є прямим добутком тіл.

Згідно теореми Моріти [26] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це значить, що в розкладі напівдосконалого кільця A в пряму суму головних A-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму головних модулів: $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$.

Підмодуль N модуля M називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля X модуля M.

Модуль P називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля M на модуль N $(\varphi: M \to N)$ і для будь-якого гомоморфізму $\psi: P \to N$ існує гомоморфізм $h: P \to M$ такий, що $\psi = \varphi h$.

Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля M, якщо існує епіморфізм $\varphi: P \to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ - косуттєвий підмодуль в P.

Теорема 3 [22] (Басс). *Наступні умови рівносильні для кільця A:*

(а) кільце A напівдосконале;

(б) будь-який циклічний A-модуль має проективне накриття.

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, P_1, …, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Тоді проективне накриття $P(P_iR)$ модуля P_iR має вигляд:

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad (i,j = 1, \dots, s).$$

Співставимо модулям P_1, …, P_s точки 1, …, s і з’єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $K(A)$.

Аналогічно визначається лівий сагайдак $K'(A)$ нетерового зліва напівдосконалого кільця A.

Відмітимо, що сагайдак напівдосконалого кільця не змінюється при переході до кілець, еквівалентних в сенсі Моріти. Очевидно, також, що $K(A)=K(A/R^2)$.

Сагайдак називається *незв’язним,* якщо множину його точок можна розбити на дві множини, які не перетинаються і між якими немає стрілок.

У противному випадку сагайдак називається *зв’язним*.

Кільце називається *нерозкладним*, якщо його не можна представити у вигляді добутку двох ненульових кілець.

Теорема 4 [4]. *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетерового кільця A:*

(а) A нерозкладне в прямий добуток кілець;

(б) A/R^2 нерозкладне в прямий добуток кілець;

(в) сагайдак кільця A зв'язний.

Напівдосконалі кільця та їх сагайдаки вивчалися у роботах [1; 6; 9].

Модуль M називається *дистрибутивним,* якщо для будь-яких підмодулів K, L, N справедлива рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Зрозуміло, що будь-який підмодуль і будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивні.

Цоколем модуля називається сума всіх мінімальних підмодулів цього модуля, тобто сума всіх простих модулів.

Теорема 5 [23]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі з точністю до ізоморфізму не більше одного примірника кожного простого модуля*.

Лема 1[4]. *Простий модуль U_k (V_k) входить в прямий розклад модуля e_iR/e_iR^2 (Re_i/R^2e_i) тоді і тільки тоді, коли $e_iR^2e_k$ ($e_kR^2e_i$) строго міститься в e_iRe_k (e_kRe_i).*

Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів лінійно впорядкована.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем.*

Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно являється напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Нерозкладний модуль M називається *n-рядним*, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі $K_1, \cdots, K_n$ (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + \cdots + K_n$ є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_i \cap K_j$ ($i \neq j$) - нуль або простий модуль [8].

Напівдосконале кільце A називається *n-рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий A-модуль є n-рядним [8].

Часто, не уточнюючи n, n–рядне кільце називають багаторядним.

Ясно, що при $n=1$ ми отримаємо напівланцюгові кільця, а при $n = 2$ – бірядні кільця.

Теорема 6 [8]. *Якщо кільце A багаторядне справа (зліва), e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце A багаторядне, то й кільце eAe багаторядне.*

Теорема 7 [8]. *Локальне багаторядне кільце A є ланцюговим.*

Лема 2 [20, 133]. *Фактормодуль n-рядного модуля n-рядний.*

Д о в е д е н н я. Очевидно,що фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивний. Нехай P – головний *n-рядний* модуль, $K_1, K_2, .., K_n$ – ланцюгові модулі, сума яких є найбільшим власним підмодулем в P. Позначимо через M – довільний підмодуль модуля P. Якщо $M = K_1+\ldots+K_n$, то ясно, що P/M *n-рядний*. Нехай M не збігається з $K_1+\ldots+K_n$. Тоді в силу дистрибутивності модуля P,

$M=M\cap K_1+\ldots+M\cap K_n$ звідки випливає, що $(K_1+\ldots+K_n)/M\cong K_1/K_1\cap M+\ldots+K_n/K_n\cap M$, де доданки в сумі – ланцюгові модулі. Лема доведена.

З цієї леми випливає:

Лема 3. *Факторкільце n-рядного справа (зліва) кільця A n-рядне справа (зліва). Зокрема, факторкільце n-рядного кільця n-рядне.*

Теорема 8 [8]. *Нехай A – нетерове n-рядне кільце. Тоді з будь-якої точки сагайдака кільця A виходить не більше n стрілок і в будь-яку точку сагайдака кільця A входить не більше n стрілок, причому з однієї точку в іншу (можливо, співпадаючу з вихідною) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, що задавольняє цим умовам, то існує n-рядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

Нерозкладний проективний A-модуль P будемо називати *в точності n-рядним*, якщо він дистрибутивний і його радикал PR – сума $K_1, \ldots, K_n$ таких, що $K_i \cap K_j$ або простий, або нуль, $i \neq j$, $(i, j = 1, \ldots, n)$, і для будь-якого i модуль K_i не міститься в $\sum_{j\neq i} K_j$.

Лема 4 [8]. *Нерозкладний проективний модуль P над багаторядним нетеровим кільцем A в точності m-рядний тоді і тільки тоді, коли з вершини сагайдака Q(A), що відповідає модулю P, виходить рівно m стрілок.*

Теорема 9 [8]. *Нерозкладне нетерове багаторядне кільце A з нульовим цоколем є напівланцюговим первинним кільцем.*

Твердження 3 [6]. *Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} - підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} - підмодулем в A_{ij}.*

Лема 5. *Якщо із точки сагайдака нетерового багаторядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Мінором n-го порядку кільця A називається кільце ендоморфізмів B скінченно-породженого проективного A-модуля, який розкладається в пряму суму n – нерозкладних модулів [24].

Твердження 4. *Кожний мінор n-рядного кільця є n-рядним кільцем.*

Д о в е д е н н я випливає з теореми 6, яка стверджує, що для довільного ідемпотента *e* *n*-рядного кільця *A* кільце *eAe* також *n*-рядне.

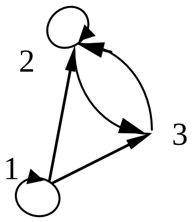
Розглянемо зведені мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець. Враховуючи теорему 8, будемо мати, з точністю до ізоморфізму, 86 сагайдаків побудованих на 3-х вершинах, а отже і 86 мінорів третього порядку нетерових багаторядних кілець з умовами, які накладаються на їх компоненти [21].

З теореми *3* випливає, що сагайдакам з трьома вершинами відповідають, як максимум, трирядні кільця.

Мінор третього порядку нетерового багаторядного кільця має вигляд:

$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, а його радикал Джекобсона $R = \begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & R_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & R_3 \end{pmatrix}$, де R_i – радикал Джекобсона кільця ϑ_i *(i = 1,2,3)*, а ϑ_i – дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{ij} – ланцюговий лівий ϑ_i - модуль і ланцюговий правий ϑ_j - модуль.

Розглянемо, наприклад, сагайдак:



Так як із точки 1 виходять три стрілки, то правий головний модуль P_1 в точності трирядний, в точку 2 входять три стрілки, отже лівий головний модуль Q_1 в точності трирядний. Враховуючи, що сагайдак $K(A)=K(A/R^2)$, і з точки *2* в точку *1* немає шляху, то бімодуль $A_{21} = 0$. Аналогічно, з точки *3* в точку *1* немає шляху, отже, $A_{31} = 0$.

Таким чином отримали кільце: $A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де ϑ_1 - дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, бо в противному випадку $R_1 = 0$ і в точці *1* немає петлі (якщо радикал Джекобсона кільця ϑ_1 рівний нулю, то це кільце – тіло D_1).

У вершині *3* немає петлі, тому $R_3 / R_3^2 + A_{32}A_{23} = 0$. Оскільки для нетерових кілець $R_3 \supset R_3^2$ то $R_3 = A_{32}A_{23}$.

З точки *1* в точку 3 іде стрілка, отже $A_{13} \neq 0$, а також є стрілка з точки *1* в точку *2* і з точки *2* в точку *3*. Кожній стрілці σ_{ij} відповідає гомоморфізм φ_{ij}: $P_j \to P_i$, тобто підмодуль $Im\varphi_{ij}$, який має рівно один максимальний підмодуль і $Im\varphi_{ij}/(Im\varphi_{ij})R=U_i$, де U_i – простий модуль. Якщо $A_{12}A_{23} \neq 0$, то з точки *1* в точку 3 ідуть два шляхи σ_{13} і $\sigma_{12}\sigma_{23}$, і існують фактор-модулі, цоколь яких містить суму двох простих модулів, що суперечить дистрибутивності модуля (Теорема 5). Отже, $A_{12}A_{23} = 0$.

Аналогічно, з точки *1* в точку 2 є стрілка, отже $A_{12} \neq 0$, і є шлях з точки *1* в точку *3* і з точки *3* в точку *2*. Тому $A_{13}A_{32} = 0$.

Крім того, згідно твердження 3, мають місце рівності:
$A_{12}R_2 = R_1A_{12}$, $A_{13}R_3 = R_1A_{13}$, $A_{23}R_3 = R_2A_{23}$, $A_{32}R_2 = R_3A_{32}$.

Аналогічно розглядаються інші 85 сагайдаків нетерових багаторядних кілець, побудованих на трьох точках.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.

В роботі розглянуто основні факти теорії багаторядних кілець, на трьох вершинах побудовано всі можливі сагайдаки та описано мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець, які відповідають цим сагайдакам. В перспективі можна розглядати мінори четвертого порядку нетерових багаторядних кілець та робити загальні висновки про їх структуру.

Список літератури

1. Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В. Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними // Сб. „Алгебраические исследования”. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 5-32.

2. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192с.

3. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.

4. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.

5. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.

6. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 438-456.

7. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.

8. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.

9. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. О полусовершенных полудистрибутивных кольцах // Мат. заметки. - 2001. – Т.69, №1. – С. 153-156.

10. Яременко Ю.В. Мінори четвертого порядку нетерових бірядних кілець з ациклічним базовим сагайдаком // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2001. –№1. – С. 67-74.

11. Яременко Ю.В. Мінори нетерових бірядних кілець // Наукові записки. Фізико-математичні науки. – Випуск 43. – Кіровоград, 2002. – С. 83-90.

12. Яременко Ю.В Про нетерові бірядні кільця // Вісник КДУ. Математика і механіка. – 1989. – № 31. – С. 133-138.

13. Яременко Ю.В. Про бірядні кільця // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 74. – Кіровоград, 2016. – С. 88-95.

14. Яременко Ю.В., Демченко Ю.М. Нетерові бірядні кільця з сильнозв’язним сагайдаком. // Наукові записки. Фізико-математичні науки. – Випуск 57. – Кіровоград, 2004. – С. 100-108.

15. Яременко Ю.В. Багаторядні кускові області // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2002. – №4. – С. 50-55.

16. Яременко Ю.В. Нетеровы полусовершенные полудистрибутивные кольца с многорядным колчаном // Доповіді НАН України. – 1997. – №5. – С. 54-57.

17. Яременко Ю.В. Нетерові багаторядні кільця // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 72. – Кіровоград, 2013. – С. 68-78.

18. Яременко Ю.В. Первинні сагайдаки напівспадкових багаторядних кілець // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 1999. – №2. – С. 59-65.

19. Яременко Ю.В. Колчаны наследственных многорядных колец // Доповіді НАН України. – 1999. – №9. – С .29-32.

20. Яременко Ю.В. Кільця та модулі. – Кропивницький: Видавництво Центральноукраїнського ун-ту, 2018. – 187 с.

21. Яременко Ю.В., Шторфунова Г.В. Мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 75. – Кіровоград, 2019. – С. 68-78.

22. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.

23. Camillo V.P. Distributive modules // J.Algebra. – 1975. – V. 36, № 1. – P. 16-25.

24. Drozd Yu. A. Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V. 6. – P. 173-176.

25. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.

26. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.