УДК 372.851

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ

Краснощок Анастасія

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри Гаєвський М.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи, розглянуто пропедевтику поняття логарифм, логарифмічна функція, підібрано систему вправ для переходу від показникових до логарифмічних рівнянь, підібрано систему типових вправ та задач, розглянуто особливості задач рівня

Ключові слова: *Функція, рівняння, нерівності, логарифм, степінь, параметр.*

Methods of teaching solving logarithmic equations and inequalities and their systems

A. Krasnoshchok

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer Haievskyi M.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with logarithmic equations, inequalities and their systems, discusses the concept of logarithms, the logarithmic function, the system of exercises for transition from indexes to logarithmic equations is selected, the system of typical exercises and tasks is considered, the features of level problems are considered

Keywords: *Function, equation, inequalities, logarithm, degree, parameter.*

Постановка проблеми. Тема «Логарифм та логарифмічна функція» вивчається у курсі алгебри 11 класу. Раніше ця тема у курсі шкільної математики не вивчалася, тому при першому знайомстві із нею у більшості учнів виникають проблеми. Успішне засвоєння цієї теми піднімає шанси учня скласти ЗНО з математики на максимальний бал.

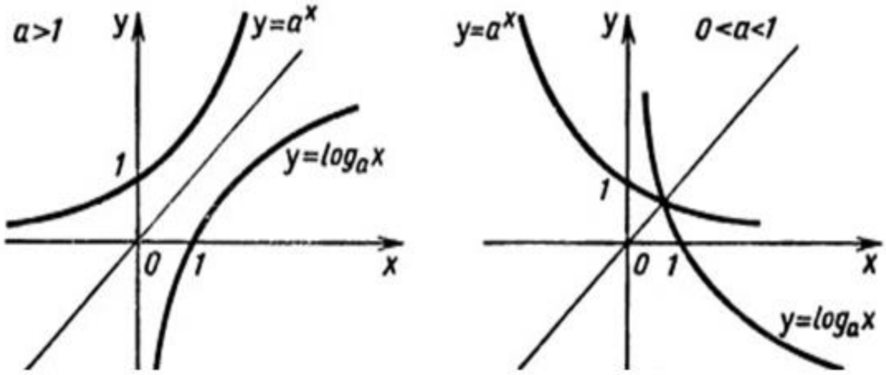
Для успішного складання ЗНО з математики учневі слід добре оволодіти поняттям «логарифм», для цього необхідним є підібрати та побувати систему вправ для учнів, виконання яких дозволить йому краще опанувати даним поняттям.

Мета статті: підібрати та побудувати систему вправ для учнів по темі «Логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи», розглянути типові приклади, що найбільш ймовірно можуть бути у завданнях ЗНО з математики.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Логарифми були не пізніше 1594 р. винайдені шотландським бароном Непером (1550-1617р.) і через десять років швейцарським механіком Бюргі (1552-1632 р.). Обидва хотіли вказати новий зручний засіб арифметичних обчислень, хоча підійшли вони до цього завдання по- різному.

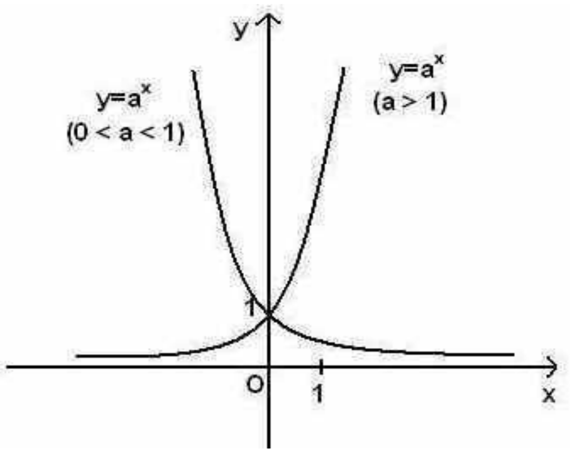
Термін «логарифм» (logarithmus) виник з поєднання грецьких слів: ariqmo - «число» і logos - «ставлення», яке означає «число відношень», вперше ввів поняття Непер. Спочатку Непер користувався іншим терміном: numeri artificiales - «числа штучні», на противагу numeri naturalts - «числам природним» .

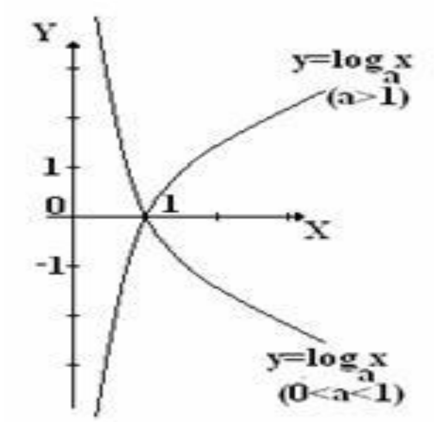
Функція вигляду $log_a x$ називається логарифмічною функцією, де $a > 0, a \neq 1, x \epsilon (0; +\infty), y \epsilon R$, вона є оберненою до показникової.



Функції є оберненими, тому і їх властивості корисно розглянуто одночасно.

Показникова функція	Логарифмічна функція
1. $D(a^x) = R$.	1 . $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.
2. $E(a^x) = (0; +\infty)$.	2. $E(\log_a x) = (R)$.
3. Функція загального вигляду.	3. Функція загального вигляду.
4. Не періодична.	4. Не періодична.

<table>
<tr>
<td>
5. Вісь OX не перетинає; вісь OY перетинає в точці (0;1).
6. $y > 0$ при $x \in D\,(y)$.
7. Вісь OX є горизонтальною асимптотою.
8. Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою, якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною.
9. Екстремумів у функції немає.
10. Графік показникової функції.


</td>
<td>
5. Вісь OX перетинає в точці $(1; 0)$, вісь OY не перетинає.
6. Якщо $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, якщо $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$.
7. Вісь OY є вертикальною асимптото
8. Якщо $a > 1$, то ця функція зростаюча, Якщо $0 < a < 1$, то ця функція спадна.
9. Екстремумів у функції немає.
10. Графік функції логарифмічної.


</td>
</tr>
</table>

Для введення показникової функції використовується конкретно-індуктивний метод. Приклад: y=2^x та y=$\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Графіки будується по точках і пропонуються таблиці.

$y=2^x$. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

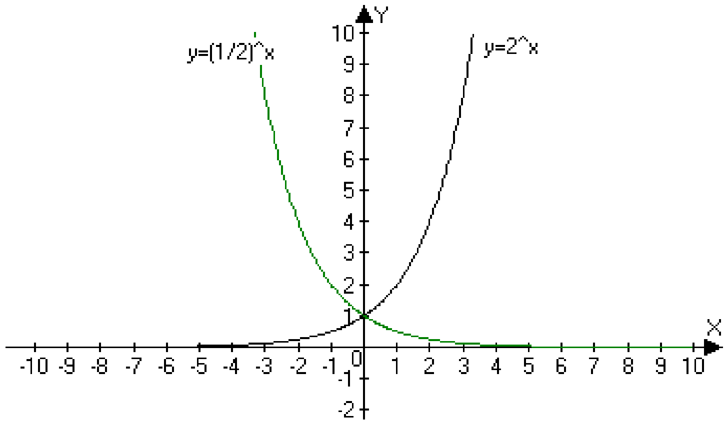


Рис.1

$y=2^x$ – зростаюча функція, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ – спадна.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $log_2^2\ x - 3log_2\ x = 4$.

Розв'язання

Позначимо $log_2 x$ через y. Рівняння дане має вигляд:

$y^2 - 3y = 4$; $y^2 - 3y - 4 = 0$; $y_1 = 4$; $y_2 = -1$.

Звідси $log_2 x = 4$, $log_2 x = -1$;

$x = 2^4$; $x = 2^{-1}$;

$x = 16$, $x = \frac{1}{2}$.

Перевірка: 1) $log_2^2\ 16 - 3\ log_2\ 16 = 16 - 12 = 4$;

2) $log_2^2 \frac{1}{2} - 3\ log_2 \frac{1}{2} = -1 + 3 = 4$.

Відповідь: 16; $\frac{1}{2}$.

Приклад 2 . Розв'яжіть рівняння $log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$.

Розв'язання

$$log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3; \qquad log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3;$$

$$log_3 x - 2\cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3; \qquad log_3 x + 2log_3 x = 3;$$

$$3log_3 x = 3; \qquad log_3 x = 1; \qquad x = 3.$$

Перевірка: $log_3 3 - 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ — корінь.

Відповідь: 3.[1]

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}.$$

Розв'язання. Область допустимих значень:

$$\begin{cases} 9 - 2^x > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \begin{cases} 2^x < 9, \\ x < 3, \end{cases}$$

звідки x<3.

Застосувавши до правої частини основи логарифмічну тотожність, матимемо

$$log_2(9 - 2^x) = (3 - x).$$

За означенням логарифма

$$2^{3-x} = 9 - 2^x, \frac{8}{2^x} = 9 - 2^x \text{ або } 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0,$$

звідки $2^x = 1$ та $2^x = 8, x_1 = 0, x_2 = 3.$

Відповідь: 0;3. [3]

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$2\sqrt[3]{2log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{log_2 x} - 6 = 0.$$

Для того, щоб звести розв'язування цього рівняння до послідовного розв'язування алгебраїчного і найпростіших логарифмічних рівнянь, треба насамперед звести всі логарифми до однієї основи. Для цього скористаємося формулою

$$log_a N = \frac{log_b N}{log_b a},$$

за якою $log_{16}x = \frac{log_2 x}{log_2 16} = \frac{log_2 x}{4}$. Підставивши в умову замість $log_{16}x$ рівну йому величину $\frac{log_2 x}{4}$, дісанемо рівняння

$$\sqrt[3]{log_2^2 x} - \sqrt[3]{log_2 x} - 6 = 0.$$

Заміною $\sqrt[3]{log_2 x} = y$ це рівняння зводиться до квдратного відносно невідомої у:

$$y^2 - y - 6 = 0.$$

Корені даного квадратного рівняння: $y_1 = 3, y_2 = -2.$

Розв'язуємо рівняння:

$$\sqrt[3]{log_2 x} = 3 \Leftrightarrow log_2 x = 7 \Leftrightarrow x = 2^{27}$$

$$\sqrt[3]{log_2 x} = -2 \Leftrightarrow log_2 x = -8 \Leftrightarrow x = 2^{-8}.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$log_5(x + 3) = 3 - x.$$

Розв'язання. Дуже легко перевірити, що x=2 є коренем даного рівняння, оскільки функція $y = log_5(x + 3)$ зростає на всій своїй області визначення, а функція $y = 3 - x$ спадає. Отже, дане рівняння не має інших коренів.

Відповідь: 2. [4]

Приклад 6. $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1.$

Для розв'язання рівняння перейдемо до основи 2. Отримаємо

$\frac{\log_4(x+12)}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = 1, \ \ \log_4(x+12) = 2\log_2 x.$

$x + 12 = x^2; \ x_1 = 4, \ x_2 = -3.$

Зробивши перевірку, бачимо, що корінь $x_2 = -3$ не задовольняє рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $5^{x-1} = 3^{x^2-3x+2}$.

Слід прологарифмувати обидві частини рівняння за основою 3. Тоді

$2(x-1)\log_3 5 = (x-1)(x-2); \ x - 1 = 0, \ x_1 = 1,$

$\log_3 5 = x - 2, \ x_2 = 2 + \log_3 5 = \log_3 45.$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_2(2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 64) = x + 4.$

Перейдемо до такого рівняння:

$2^{2x}-4\cdot 2^x+64=2^{x+4}.$

Введемо заміну $2^x=t$ і отримаємо:

$t^2-20t+64=0,\ t_1=16,\ t_2=4;\ 2^x=16,\ x_1=4;\ 2^x=4,\ x_2=2.$

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(xy)+y+2=0\\ 17+3^{y+2}=\dfrac{18}{xy}\end{cases}$.

З першого рівняння знайдемо $xy=3^{y+2}>0$.

Тоді зробивши заміну $3^{y+2}=z>0$ будемо мати:

$17+z=\dfrac{18}{z},\ z_1=1,\ z_2=-18.$

Отримане значення $z_2=-18$ є стороннім коренем, бо не задовольняє умову $z>0$.

Остаточно маємо: $3^{y+2}=1,\ y=-2,\ xy=1,\ x=-\dfrac{1}{2}$. [5]

Приклад 10. При яких значеннях параметра а корінь рівняння

$\lg(\sin 5\pi x)=\sqrt{16+a-x}$

належить проміжку $(1;\frac{3}{2})$ (ЗНО 2013)

Розв'язання: Аналіз із встановлення ОДЗ:

$\begin{cases} sin5\pi x>9;\\ 16+a-x\geq 0.\end{cases}$

Оскільки коренева функція є додатно визначена, то ліва частина також є додатня

$\lg(\sin 5\pi x)\geq 0$

або

$sin5\pi x\geq 1,$

Синус функція обмежена

$|sin5\pi x|\leq 1,$

тому $sin5\pi x=1,$

і ліва $\lg(sin5\pi x)=0$ та права частина $\sqrt{16+a-x}$=0.

приймають нульові значення. Розв'язуємо рівняння перше:

$sin5\pi x = 15 \rightarrow 5\pi x = \frac{\pi}{2}+2\pi k \rightarrow x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k, k\epsilon Z.$

За умовою аргумент належить інтервалу $x\epsilon \left(1; \frac{3}{2}\right)$. Звідси отримаємо

$$1 < \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k < \frac{3}{2}; k\epsilon Z \rightarrow 1 - \frac{1}{10} < \frac{2}{5}k < \frac{3}{2} - \frac{1}{10}, k\epsilon Z;$$

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{2} < k < \frac{14}{10} \cdot \frac{5}{2}; k\epsilon Z$$

$$2{,}25 < k < 3{,}5; k\epsilon Z \rightarrow k = 3.$$

Тому $x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot 3 \rightarrow x = \frac{13}{10}; 1 < 1{,}3 < 1{,}5 = \frac{3}{2}$.

Розв'яжемо праву частину

$$\sqrt{16 + a - x} = 0 \rightarrow 16 + a - x = 0 \rightarrow a = x - 16 \rightarrow a = 1{,}3 - 16 = -14{,}7.$$

та знайдемо значення параметру. [6]

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. «Методика навчання логарифмічних рівнянь і нерівностей» є дуже важливою для учнів старшої школи. В роботі систематизовано відомості про розв’язування логарифмічних рівнянь й нерівностей та їх систем, розглянуто основні способи розв’язання логарифмічних рівнянь й нерівностей та всі типові складності які виникають при розв’язуванні цих рівнянь. Підібрано диференційовану систему вправ.

Список використаної літератури

1. "Алгебра і початки аналізу", 10-11 клас, М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук, Київ, "Зодіак-ЕКО", 2001

2. "Практикум з елементарної математики для абітурієнтів", О.В. Крапивний, Запоріжжя, 2005

3. Істер О.С.Дидактичні матеріали з алгебри. 11 клас: Вправи. Самостійні роботи. Тематичні контрольні роботи. Завдання для корекції знань. - Кам'янець-Подільський: Абетка, 2004

4. Алгебра і початки аналізу. Підруч. для 10–11 кл. серед, шк. / А. М. Колмогоров, О. М. Абрамов, Ю. П. Дудніцин та ін.; За ред. А. М. Колмогорова. – К.: Освіта, 1992

5. Алексюк А. М. Загальні методи навчання в школі. - 2-ге вид., переробл. і допов. - К.: Рад. шк., 1981

6. Будна О. С. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Алгебра і початий аналізу. 11 клас: Тести для тематичного оцінювання / О. С. Будна, С. М. Будна. — Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2007

7. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів.— 2-ге вид., виправл. і доп.— Х.: Світ дитинства, 2006