УДК 371.512

ЗАДАЧІ ІНТЕГРАТИВНОГО ЗМІСТУ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ

Смолінчук Олександр

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті висвітлюються основні методичні прийоми узагальнення та систематизації навчальних досягнень старшокласників через застосування задач інтегративного змісту. В статті робиться висновок про доцільність застосування розв'язування задач з математики інтегративного змісту як такого, що розширює можливості учнів у пошуку розв'язання математичних задач і, цим самим, розвиває їх мислення.

Ключові слова: *навчальні досягнення, узагальнення, систематизація, проблемний метод, інтеграція, задача, задачна серія.*

The objectives of an integrated content for generalizing and systematizing the mathematical educational achievements of the high school students

O. Smolinchuk

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article highlights the main methodological methods of generalizing and systematizing the knowledge of high school students due to the application of the integrative content tasks. The article concludes expediency of solving Math integrative content itself that empowers the students to find solutions to mathematical problems and, thus, develop their thinking.

Keywords: *educational achievements, generalizations, systematization, problem method, integration, task, problem series.*

Постановка проблеми. Специфіка навчального (а не наукового) пізнання вимагає особливої уваги до інтегративних процесів, які є основою формування систем знань (загальноосвітніх, професійних тощо). Тотожність, відмінність і протилежність елементів, які інтегруються, відіграють суттєву роль як під час інтеграції, так і суттєво впливають на властивості інтегрованого об'єкта чи системи. Єдність світу як цілісної системи не виключає, а передбачає якісну різноманітність явищ. Звідси випливають дві тенденції: прагнення відобразити єдину картину світу, подати його як єдине ціле (процес синтезу, інтеграція), друга – глибше і конкретніше пізнати закономірності та якісну різноманітність структурних систем (процес аналізу, диференціація).

Аналіз досліджень і публікацій. Для успішного усвідомлення та практичного використання складних взаємозв'язків між компонентами програмного математичного матеріалу необхідно оволодіти тезаурусом різних фактів з теорії, а також мати дослідницьку інтуїцію [4], [5], [6], [7]. Кожна навчальна дія, як правило, становить множину міркувань, операцій, формул і контролюючих заходів. У зв'язку з цим виникає необхідність проектування системно-діяльнісного навчання, що через форми і методи навчальної роботи приводить учнів до узагальнень і систематизації навчальних досягнень. Викладачі зіштовхуються з труднощами формування природничо-наукового мислення школярів, що є основною проблемою як для більшості учнів, так і для вчителів.

Педагогічні технології формування узагальнених прийомів аналізу та розв'язання проблемних ситуацій теоретичного та прикладного характеру у шкільному курсі математики (при розв'язуванні текстових математичних задач або при проведенні узагальнень теоретичного матеріалу) нерідко представлені безсистемно і не завжди використовуються педагогами-практиками. Ми пропонуємо технологію розв'язання таких проблемних ситуацій саме з позицій системно-діяльнісного навчання. Більше того, продемонструвавши результативність такої технології при викладанні математики, спробуємо показати, що технологія на основі системно-діяльнісного навчання має загально педагогічні ознаки.

Відомо, що узагальнені прийоми розумової діяльності діляться на дві великі групи – алгоритмічного типу та евристичного типу: [1], [2], [3], [8]. У дослідженнях В.В. Давидова, З.І. Калмикової, Я.А. Пономарьова, С.А. Ракова встановлено, що формування прийомів розумової діяльності алгоритмічного типу – необхідна, але не достатня умова розвитку мислення. Розв'язування предметних задач на основі алгоритмів формують "установку" на дію за зразком, обмежують пошук рамками уже відомих прийомів. Евристичні прийоми стимулюють пошук розв'язання нових проблем, відкриття нових для учня знань, включають до процесу міркування наочно-образне мислення. До евристичних прийомів відносяться: виділення головного, істотного у змісті матеріалу, узагальнення, порівняння, конкретизація, абстрагування, різні види аналізу, аналогія, прийоми кодування, використання структурних моделей або схем.

Мета статті: продемонструвати з позицій системно-діяльнісного навчання процес узагальнення та систематизації навчальних досягнень старшокласників з використанням задачної серії, породженої задачею інтегративного змісту.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Розглянемо уривок семінарського заняття, мета якого – провести змістовне узагальнення та систематизацію знань учнів з теми «Геометрична прогресія».

Під час розв'язування наступних задач вчитель не тільки узагальнює й систематизує знання, а й розглядає методику розв'язання цих задач, що важливо для учнів як майбутніх викладачів математики.

№1. У кут $\angle AOC=\alpha$ вписано квадрати ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ і т.д., причому AB=a. Знайти відношення суми площ квадратів $D_1B_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, … , $D_{n-1}B_nC_nD_n$ до площі квадрата ABCD.

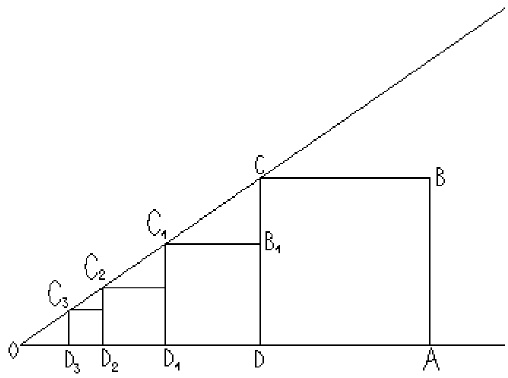

Рис. 1.

На перший погляд, ця задача вимагає досить великих обчислень для знаходження суми площ квадратів. Досить часто перед учнями відразу ж виникне питання: як визначити суму площ усіх квадратів. Але стає зрозумілим, що для цього необхідно знайти площу кожного окремого квадрата. Тут і постає проблема: як знайти суму площ усіх квадратів, якщо їх кількість дорівнює n?

Відповідь на це запитання досить проста (необхідно скористатися формулою суми n перших членів геометричної прогресії). Тому задача викладача (вчителя) полягає в тому, щоб скерувати мислення і творчий пошук учнів у необхідному напрямку. Для цього йому досить задати їм декілька питань проблемного характеру. Наприклад,

- Як знайти суму площ усіх квадратів?
- Як обчислити площу квадрата?
- Як обчислити сторону квадрата?
- Яка залежність між сторонами квадратів $D_1B_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, … , $D_{n-1}B_nC_nD_n$?
- Яку послідовність утворюють сторони цих квадратів?
- А яку послідовність утворюють площі цих квадратів?

Таким чином, задача автоматично розбивається на декілька більш простих підзадач. Коли учні дадуть відповіді на ці запитання, то їм стає досить простим і зрозумілим подальше розв’язання задачі.

ΔCOD: $\frac{OD}{CD}=\text{ctg}\ \alpha$

$OD=CD\ \text{ctg}\ \alpha=a\ \text{ctg}\ \alpha$

$OA=OD+DA=a\ \text{ctg}\ \alpha+a=a\ (\text{ctg}\ \alpha+1)$

$CD/OD=C_1D_1/OD_1$

$a/(a\ \text{ctg}\ \alpha)=C_1D_1/(OD-C_1D_1)$

$C_1D_1(1+\ \text{ctg}\ \alpha)=OD$

$C_1D_1=\ a\ \text{ctg}\ \alpha/(1+\ \text{ctg}\ \alpha)$

$OD_1=a(\text{ctg}\ \alpha-\ \text{ctg}\ \alpha/(1+\ \text{ctg}\ \alpha))=a\ \text{ctg}^2\ \alpha/(1+\ \text{ctg}\ \alpha)$

$C_1D_1/OD_1=\ C_2D_2/OD_2$

$C_2D_2/(OD_1- C_2D_2)= C_1D_1/OD_1$

$C_2D_2* OD_1= C_1D_1*OD_1- C_1D_1* C_2D_2$

$C_2D_2(OD_1+ C_1D_1)= C_1D_1* OD_1$

C_2D_2 a ctg α=a ctg α/(1+ ctg α)* a ctg^2 α/(1+ ctg α)

C_2D_2= a ctg^2 α/(1+ ctg α)^2

Виконуючи обчислення, впевнюємося, що сторони квадратів $D_1B_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, … , $D_{n-1}B_nC_nD_n$ утворюють спадну геометричну прогресію із знаменником ctg α/(1+ ctg α):

a ctg α/(1+ ctg α); a ctg^2 α/(1+ ctg α)^2; … ;

а площі квадратів утворюють таку спадну геометричну прогресію:

a^2 ctg^2 α/(1+ ctg α)^2; a^2 ctg^4 α/(1+ ctg α)^4; …; знаменник якої q= ctg^2 α/(1+ ctg α)^2.

Тому суму площ квадратів $D_1B_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, … , $D_{n-1}B_nC_nD_n$ можна обчислити, використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії: $S=b_1/(1-q)$.

S_n= a^2 (ctgα^2/(1+ ctg α)^2)/(1-(ctg α/(1+ ctg α))^2)=(a^2 (ctgα/(1+ ctg α))^2*(1+ ctg α)^2)/(1- ctg$^2\alpha$)=a^2 ctg^2 α/(1- ctg α)^2

Тепер досить легко буде обчислити відношення суми площ квадратів $D_1B_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, … , $D_{n-1}B_nC_nD_n$ до площі квадрата ABCD.

S_n:S= a^2 ctg^2 α/(1- ctg α)^2:a^2= ctg^2 α/(1- ctg α)^2

Відповідь: ctg^2 α/(1- ctg α)^2

№2. В кут $\angle AOB=\alpha$ вписано рівносторонні трикутники ABC, CB_1C_1, і т.д., причому AB=a. Знайти відношення суми площ трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$ і т.д. до площі трикутника ABC.

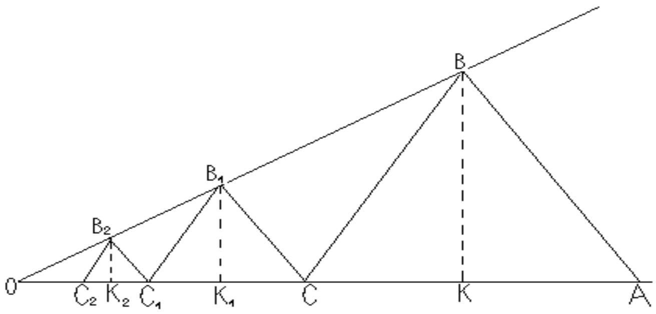

Рис. 2.

Щоб знайти відношення суми площ трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$ і т.д. до площі трикутника ABC, необхідно знати як визначити суму площ трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$ і т.д., вписаних у кут $\angle AOB$. Для цього необхідно спочатку обчислити площу рівностороннього трикутника $S=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Але таких трикутників за умовою задачі n. Виникає природне запитання: чи потрібно шукати площу кожного з цих трикутників окремо? Чи не має більш простішого способу розв'язання цієї задачі?

Перед учнями постає проблема, відповідь на яку вони поки що дати не можуть. Щоб направити їх в необхідне русло думок, вчителеві необхідно задати їм декілька запитань. Наприклад,

- Як обчислюється площа рівностороннього трикутника?

- Якими є трикутники ABC, CB_1C_1, і т.д.?

- Як знайти сторони цих трикутників?

- Чим у рівносторонньому трикутнику є висота?

- Яке відношення сторін можна записати для подібних трикутників ABC, CB_1C_1, і т.д.?

- Як відносяться сторони цих трикутників?

Відповідаючи на ці запитання, учні поступово розв'язують задачу.

З трикутника BOK маємо: $\frac{OK}{BK}=\text{ctg}\alpha$

$OK=\frac{a\sqrt{3}}{2}\ \text{ctg}\alpha$

OC=OK-CK=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$; AO=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα + $\frac{a}{2}$.

Трикутники AOB і B_1OC подібні (за двома кутами), тому B_1C/BA=OC/AO

$B_1C=\frac{BA*OC}{AO}$ =a($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$)/($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα + $\frac{a}{2}$)

Можна також впевнитись, що сторони трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$ і т.д. утворюють спадну геометричну прогресію.

Для цього можна виконати додаткові обчислення для визначення сторони трикутника $C_1B_2C_2$:

$OC_1=OC-CC_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$ - a($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$)/($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα + $\frac{a}{2}$)

$B_2C_1=B_1C(OC-B_1C)/OC= B_1C- B_1C^2/OC$= a($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$)/($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα + $\frac{a}{2}$)-

-(a($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$)/($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα + $\frac{a}{2}$))^2/($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ctgα - $\frac{a}{2}$)=($\frac{3}{4}$a^3 ctg^{2}α-a^3/4-a$^3\frac{\sqrt{3}}{2}$ctgα+ +a^3/2)=a($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/($\sqrt{3}$ctgα+1)^2

Отже, сторони трикутників утворюють геометричну спадну прогресію із знаменником q=($\sqrt{3}$ctgα-1)/($\sqrt{3}$ctgα+1):

a($\sqrt{3}$ctgα-1)/($\sqrt{3}$ctgα+1); a($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/($\sqrt{3}$ctgα+1)^2; … .

Площа рівностороннього трикутника зі стороною a обчислюється за формулою: S=a$^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Тому площі трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, … утворюють спадну геометричну прогресію із знаменником q=(($\sqrt{3}$ctgα-1)/($\sqrt{3}$ctgα+1))^2:

$\frac{\sqrt{3}}{4}$a^2($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/($\sqrt{3}$ctgα+1)^2; $\frac{\sqrt{3}}{4}$a^2($\sqrt{3}$ctgα-1)^4/($\sqrt{3}$ctgα+1)^4; … .

Використовуючи формулу суми n перших членів спадної геометричної прогресії, знаходимо суму площ трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, … :

S_n= a^2($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/16ctgα.

S_n:S= a^2($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/16ctgα: a$^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4\sqrt{3}}$ ($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/ctgα.

Відповідь: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ ($\sqrt{3}$ctgα-1)^2/ctgα.

№3. В квадрат ABCD вписано коло. В це коло вписаний квадрат $A_1B_1C_1D_1$. В квадрат $A_1B_1C_1D_1$ вписане коло, в яке вписано квадрат $A_2B_2C_2D_2$ и т.д. Знайти відношення суми площ квадратів $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$,…, $A_nB_nC_nD_n$ до площі квадрата ABCD, якщо AB=a.

Як бачимо, умова цієї задачі схожа до попередніх. І тому якщо розв'язувати на уроці, де планується узагальнення та систематизація навчальних досягнень учнів, не одну таку задачу, а декілька, то їм відразу стане зрозумілим, що сторони квадратів утворюють спадну геометричну прогресію.

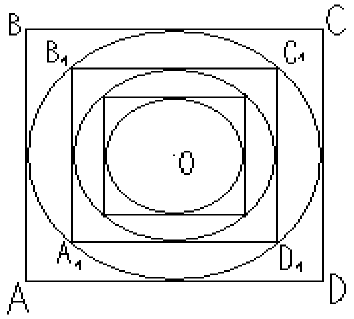

Рис. 3

Тому вчитель може задавати проблемні запитання учням вже трохи іншого характеру, враховуючи запитання до попередніх задач. Наприклад:

як вписати коло у даний квадрат?

яка залежність між радіусом вписаного у квадрат кола і стороною цього квадрата?

Визначивши, що діаметр вписаного у квадрат кола є стороною цього ж квадрата, учні приходять до висновку, що радіус цього ж вписаного кола є половиною діагоналі вписаного у це коло квадрата.

Тому запис розв'язання може мати такий вигляд.

За умовою задачі AB=AD=a. Знайдемо сторони інших квадратів та визначимо їх суму.

$OA_1=1/2a$; $D_1B_1=a$; $A_1B_1=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$B_2D_2= A_1B_1=\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_2B_2=\frac{a}{2}$.

Аналогічно можемо визначити й сторони інших квадратів, в результаті ми отримаємо спадну геометричну прогресію:

$\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{a}{2};\ldots$.

Знаменник цієї прогресії $q=1/\sqrt{2}$.

Площі квадратів $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$,…, $A_nB_nC_nD_n$ утворюють таку спадну геометричну прогресію: $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{4}$; … , знаменник якої q=1/2. Тому можна скористатися формулою для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії.

$$S_n=(\frac{a}{\sqrt{2}})^2/(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2)= (a^2/2)/(1-\frac{1}{2})=(a^2/2)*2=a^2$$

$S_n : S= a^2: a^2=1.$

Відповідь:1.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Таким чином, задачі такого типу можна розбити на декілька підзадач: знаходження невідомого елемента (сторони трикутника чи квадрата), знаходження площі фігури (трикутника, квадрата), знаходження необхідної суми площ фігур, порівняння знайденої суми площ фігур із площею фігури з відомим елементом. В процесі розбиття задачі на підзадачі відбувається автоматичне розбиття умови, запитання та самого процесу розв’язання задачі на частини, які допомагають учням швидше зорієнтуватися та полегшити розв’язання. Матеріал, викладений у даній роботі, дає можливість зробити висновок про доцільність застосування розв’язування задач з математики інтегративного змісту як такого, що розширює можливості учнів у пошуку розв’язання математичних задач і, цим самим, розвиває їх мислення.

Список використаної літератури

1. Выготский Л.С. Психология. – М.: ЭКСМО-Пресс, 2000. – 108 с.
2. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.
3. Зависимость обучения от типа ориентировочной деятельности / Под ред. П.Я. Гальперина и Н.Ф. Талызиной. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. – 238 с.
4. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
5. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв’язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.

6. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики / навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 209 с.
7. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Розв’язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп’ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 34–39.
8. Раков С. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.