УДК 373.5.016:51

# МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

**Самойленко Людмила**

**Науковий керівник: доктор педагогічних наук, професор Кушнір В.А.**

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

*У статті висвітлено актуальність вивчення теми «Логарифмічні рівняння та нерівності» як однієї з основних тем в шкільному курсі алгебри та початків аналізу старшої школи. Детально на прикладах показано розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей різними методами за рівнями складності. Вказано основні моменти, на які потрібно звернути увагу при розв'язуванні, для попередження втрати коренів чи виникнення сторонніх.*

***Ключові слова:*** *логарифмічні рівняння та нерівності, корінь рівняння, розв'язок нерівності, потенціювання, логарифмування, монотонність функції, ОДЗ.*

**Methodology of training of logarifmic equations and inequalities**

**L. Samoilenko**

**Scientific supervisor: Doctor of Pedagogical Sciences, Professor Kushnir V.A.**

*The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine*

*The article highlights the relevance of the study of the theme "Logarithmic Equations and Inequalities" as one of the main topics in the school course of algebra and the beginnings of analysis of high school. Examples of solutions of logarithmic equations and inequalities in different methods by complexity levels are shown in detail. The main points that you need to pay attention to when deciding are to prevent root loss or outsiders.*

***Keywords:*** *logarithmic equations and inequalities, the root of the equation, the inequality solution, the potentiation, the logarithm, the monotonicity of the function, ODE.*

**Постановка проблеми.** Вивчення логарифмічних рівнянь та нерівностей є однією з основних змістових ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу, яка має розгалужену систему внутрішньо-предметних зв’язків з іншими лініями курсу та досить широко використовується при вивченні інших дисциплін. Тому традиційно логарифмічні рівняння та нерівності представлені в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Як засвідчують аналітичні звіти Українського центру оцінювання якості освіти, результати виконання цих завдань в останні роки погіршилися, що вимагає пошуку шляхів удосконалення методики вивчення логарифмічних рівнянь та нерівностей.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Для осмислення цілісності формування прийомів навчальної діяльності учнів з розв’язування рівнянь та нерівностей важливими є результати психологічних та педагогічних досліджень, досліджень методистів, пов’язаних з аналізом навчальної діяльності. Аналіз дидактичних особливостей формування знань і вмінь учнів, пов’язаних із розв’язуванням логарифмічних рівнянь та нерівностей, спирається на дослідження дидактичних закономірностей організації особистісно орієнтованого навчання (праці Ю.К. Бабанського, М.А. Данилова, Л.В. Занкова, І.Я. Лернера, В.І. Лозової, В.О. Оніщука, В.В. Сєрікова, М.Н. Скаткіна, А.В. Хуторського, З.І. Слєпкань та ін.)

**Мета статті:** теоретично обґрунтувати й розробити окремі компоненти методичної системи навчання старшокласників розв’язуванню логарифмічних рівнянь та нерівностей, розкриття важливих моментів процесу розв’язування.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Нагадаємо, що логарифмічні рівняння розв’язуються з використанням: означення логарифма, властивостей логарифмів, логарифмічних тотожностей; потенціюванням; логарифмуванням обох частин рівняння; зведенням до однієї основи; методом заміни змінної; застосуванням монотонності функцій, які стоять під знаком логарифма.

Важливо звернути увагу на те, що оскільки логарифмічна функція визначена лише на множині додатних чисел, то варто ще до розв′язування рівняння знайти область визначення виразів, що входять до складу рівнянь [7; 376].

Необхідно враховувати, що всі властивості логарифмічної функції були доведені за умови, що вирази, які стоять під знаком логарифма, додатні [3].

Наприклад,

$loq_a xy = loq_a x + loq_a y$ тільки при $x>0$ і $y>0$

Якщо ж у рівнянні або нерівності знаходиться вираз-добуток x*y, то він буде додатнім не тільки тоді, коли x і y додатні, але й тоді, коли x та y будуть одночасно від'ємні. У цьому випадку формулу «логарифм добутку» не використовують, бо можлива втрата коренів [3].

Необхідно відзначити, що під час розв'язку логарифмічних рівнянь необхідно враховувати область допустимих значень (ОДЗ): під знаком логарифма можуть знаходитись тільки додатні величини, в основі логарифмів – додатні, відмінні від одиниці. Проте знаходження ОДЗ деколи може бути дуже громіздким і на практиці маємо можливість вибрати: шукати ОДЗ або зробити перевірку коренів у рівнянні.

Приклад: Розв'язати рівняння

$\log_{0,3} 5 = \log_{0,3}(3-2x)$

Розв'язання: Виписуємо обмеження на область допустимих значень логарифма (ОДЗ):

$3-2x>0 \to x<1,5.$

Наступним кроком при рівних основах прирівнюємо вирази під логарифмами

$5=3-2x \to 2x=-2 \to x=-1.$

Значення *x=-1* задовільняє ОДЗ, отже є розв'язком логарифмічного рівняння.

Бажано по можливості не використовувати формули логарифмування добутку, частки, і парного степеня, якщо це призводить до звуження області визначення рівняння, а користуватися цими формулами тільки справа наліво, що приводить до розширення області визначення (в цьому випадку можлива хіба що поява сторонніх коренів, але їх можна відсіяти перевіркою). Щоб виконувані перетворення були рівносильні, необхідно, щоб виконувалися і обернені перетворення на області визначення даного рівняння [3].

Приклад: Розв'язати рівняння

$2\lg x(x-1) = \lg (x-1)^2+4$ (1).

Розв'язання: На області визначення рівняння$\{x(x-1)>0;\ (x-1)^2>0$ це рівняння рівносильне рівнянню

$\mathrm{Lg}(x(x-1))^2 - \lg( x-1)^2 = 4$ (2)

яке в свою чергу рівносильне рівнянню

$\lg(x(x-1)^2/(x-1)^2) = 4$ (3)

Усі перетворення рівносильні, бо на області визначення даного рівняння можна виконувати перетворення (1) - (2) - (3) і обернені перетворення (3) - (2) -

(1). Скоротивши в рівнянні (3) дріб на $(x-1)^2$ , $((x-1)^2 >0)$ ( на області визначення), дістанемо рівносильне рівняння: lq x = 4 (4).
Це рівняння за означенням логарифма рівносильне рівнянню $x^2 = 10^4$ (5).
Звідси x =±100 . Оскільки ці значення входять в область визначення рівняння і ніяких додаткових обмежень у нас не було, то x =± 100 - корені даного рівняння.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що при розв'язуванні логарифмічних рівнянь можна користуватися не тільки рівносильними перетвореннями, але й діставати рівняння-наслідки (коли ми гарантуємо тільки прямі перетворення і не гарантуємо обернені). Учні повинні розуміти, що при використанні рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів і тому в цьому випадку перевірка є складовою частиною розв'язування рівняння.

Слід звернути увагу учнів на те, що певної акуратності потребує використання формули переходу від однієї основи до іншої: $loq_aN = loq_bN/loq_ba$

Де N>0 , a>0 , a≠1, b>0, b≠1.

Якщо a≠1 і b≠1, то цю формулу можна застосовувати і зліва направо і справа наліво (при N>0 ), тобто використання цієї формули при розв'язуванні рівнянь або нерівностей приводить до рівняння (нерівності), рівносильного даному. Якщо ж новою основою логарифма є вираз із змінною, то може виявитися, що цей вираз на області визначення початкового рівняння дорівнюватиме одиниці, а після застосування формули переходу від однієї основи до іншої вираз, що стоїть в основі логарифма, вже не дорівнюватиме одиниці. В цьому випадку застосування формули переходу від однієї основи до іншої може привести до втрати тих коренів початкового рівняння, для яких нова основа логарифма дорівнює одиниці.

Підсумовуючи ці міркування, робимо висновки: якщо при переході від однієї основи логарифмів до іншої нова основа - число (звичайно більше від нуля і не дорівнює одиниці), то дістанемо рівняння, рівносильне даному на його області визначення.

Якщо доводиться використовувати вираз із змінною як нову основу логарифма, то щоб не втратити корені рівняння, необхідно розглядати два випадки:

– вираз, який береться як нова основа, дорівнює одиниці (якщо це можливо на області визначення розглядуваного рівняння), і перевіряємо, чи будуть ці значення змінної, при яких вираз дорівнює одиниці, коренями даного рівняння;

– нова основа не дорівнює одиниці - в цьому випадку скористаємося формулою переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Бажано звернути увагу учнів на те, що деякі логарифмічні рівняння, які зведені до вигляду $f(x)=0$ можна розв'язати за допомогою розкладання лівої частини рівняння на множники.

Досить часто зустрічаються рівняння, члени яких є степенями, в яких основа і показник степеня - функції від змінної величини. В ході розв'язування цього рівняння, бажано звернути увагу учнів на те, що в цьому рівнянні (в його лівій частині) змінна входить і в основу, і в показник степеня. Доцільно зафіксувати в зошитах учнів, що рівняння, в якому змінна входить і в основу, і в показник степеня, найчастіше розв'язується логарифмуванням обох частин рівняння.

Після відпрацювання цього правила на прикладах доцільно запропонувати учням більш загальний підхід (він, як правило, використовується тоді, коли немає можливості взяти логарифм від обох частин рівняння) - перехід від степеня, в основі якого стоїть вираз із змінною, до степеня з числовою основою a за формулою $(f(x))^{q(x)} = a^{q(x)\log_a f(x)}$ , де $a>0$, $a\neq1$

Зауваження. Очевидно, що при $f(x)>0$ цю формулу можна застосовувати як зліва направо, так справа наліво. Якщо ми використаємо цю формулу при розв'язуванні рівняння, на області визначення якого , то ми гарантуємо і прямі, і обернені перетворення, тобто гарантуємо рівносильність утвореного рівняння на області визначення даного.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що ідея логарифмування обох частин рівняння (або нерівності) є досить плідною і може використовуватись для розв'язування різних типів рівнянь (нерівностей), починаючи з найпростіших показникових типу $2^{x+3}=5$ (за означенням логарифма або прологарифмувавши обидві частини за основою 2, маємо: $x+3 = \log_2 5$, тобто $x = \log_2 5 - 3$ ).

Враховуючи те, що в останні 40-50 років у старших класах середньої школи реалізується функціональний підхід до рівняння, будемо вважати, що степені, в яких і основа, і показник степеня є функціями від змінної величини, означені тільки для тих значень змінних, при яких їх основи додатні (якщо в самій умові задачі не сказано протилежне) [2].

Варто запам'ятати, що десятковий логарифм від одиниці з наступними нулями дорівнює кількості нулів у запису цього числа. $\lg 10000 = 4.$

Для десяткового логарифма від виразів вигляду 0,00001 в правило подібне. Він рівний кількості всіх нулів у запису цього числа, враховуючи і нуль цілих, взятих із знаком мінус. Для прикладу $\lg 0,0000001 = -7.$

Перейдемо до розгляду практичних завдань [4, 202-216; 5; 6].

1.Розв'язати рівняння.

$2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$

Розв'язання. Використовуючи властивість логарифмів переписуємо рівняння у вигляді

$$2\log_4 x + 3\frac{1}{\log_4 x} = 5.$$

Робимо заміну змінних

$\log_4 x = y$

та переписуємо рівняння у вигляді

$$2y + \frac{3}{y} = 5.$$

Домножуємо на змінну у та записуємо у вигляді квадратного рівняння

$2y^2 - 5y + 3 = 0.$

Обчислюємо дискримінант

$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1.$

Корені рівняння шукаємо за формулою

$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 2} \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2}; y_2 = 1.$

Повертаємося до заміни змінних та знаходимо

$\log_4 x = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 4^{\frac{3}{2}} = 2^{2\frac{3}{2}} = 8;$

$\log_4 x = 1 \Rightarrow x_2 = 4^1 = 4.$ Рівняння має два розв'язки $x_1 = 8; x_2 = 4.$

Обидва є коректними.

2. Розв'язати рівняння.

$\lg(10x)\lg(0,1x) = \lg x^3 - 3.$

Розв'язання. Розкриваємо дужки та записуємо у вигляді суми логарифмів

$(\lg 10 + \lg x)(\lg 0,1 + \lg x) = 3\lg x - 3.$

Враховуючи властивості логарифма $\lg 10 = 1;\ \lg 0,1 = \lg 10^{-1} = -1$ рівняння перетворимо до вигляду

$(\lg x + 1)(\lg x - 1) = 3(\lg x - 1).$

Переносимо доданок за знаком рівності в праву сторону

$(\lg x + 1 - 3)(\lg x - 1) = 0;$

та зводимо до добутку

$(\lg x - 2)(\lg x - 1) = 0.$

Обидва множники прирівнюємо до нуля та знаходимо невідомі

$\lg x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10^2 = 100;$

$\lg x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10.$

Схема даного завдання досить поширена при обчисленні логарифмічних рівнянь.

3.Розв'язати рівняння

$x^{2-0,5\lg x} = 100.$

Розв'язання. Перепишемо праву сторону у вигляді квадрату та прологарифмуємо за основою *10* обидві частини рівняння

$\lg x^{2-0,5\lg x} = \lg 10^2 \Rightarrow (2 - 0,5\lg x)\lg x = 2.$

Виконаємо заміну змінних

$\lg x = t$

та зведемо рівняння до квадратного

$(4 - t)t = 4 \Rightarrow 4t - t^2 = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0.$

Дискримінант такого рівняння приймає нульове значення, таке рівняння має два однакові розв'язки

$t_1 = t_2 = 2.$

Повертаємося до заміни, яку виконували вище

$\lg x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100.$

отримали один корінь, який рівний 100.

4. Розв'язати рівняння.

$\log_{49} x^2 + \log_7 (x - 1) = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3)$

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення з доданками рівняння

$\log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2;$

$\log_{49} x^2 = \log_{7^2} x^2 = \frac{2}{2}\log_7 x = \log_7 x;$

$\log_7 x + \log_7 (x-1) = \log_7 x(x-1).$

Логарифмічне рівняння при цьому спроститься до наступного

$\log_7 x(x-1) = \log_7 2.$

Далі бачимо, що логарифми мають однакові основи. Це означає, що значення під знаком логарифма теж рівні.

На основі цього записуємо

$x(x-1) = 2.$

Розписуємо рівняння та розв'язуємо за допомогою дискримінанту

$x^2 - x - 2 = 0;$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9;$

Знаходимо корені

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -1.$

Другий корінь не може бути розв'язком, оскільки ніяке додатне число при піднесені до степеня не дасть в результаті *-1*.

Отже *x=2* – єдиний розв'язок рівняння.

5. Знайти розв'язок рівняння.

$\log_{\sqrt{x}} 4 \cdot \log_2 \sqrt[4]{\frac{16}{8-x}} = 1.$

Розв'язання. Виконуємо спрощення рівняння

$4\log_x 2 \cdot \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{16}{8-x}\right) = 1;$

$\log_x 2 \cdot \left(\log_2 16 - \log_2 (8-x)\right) = 1;$

$\log_x 2 \cdot \left(4 - \log_2 (8-x)\right) = 1;$

$4\log_x 2 - \log_x 2 \cdot \log_2 (8-x) = 1.$

За властивістю переходимо до другої основи у другому логарифмі

$\log_x 2 \cdot \log_2 (8-x) = \log_x (8-x);$

$4\log_x 2 - \log_x (8-x) = 1;$

$\log_x \frac{2^4}{8-x} = 1.$

За означенням логарифма отримуємо

$x^1 = \frac{2^4}{8-x}.$

Зводимо рівняння до квадратного та розв'язуємо його

$x = \frac{16}{8-x} \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0.$

$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0.$

Дискримінант рівний нулю, отже маємо один корінь кратності два

$$x = \frac{8}{2 \cdot 2} = 2.$$

6. Знайти розв'язок рівняння.

$$\log_2\left(12 - 2^x\right) = 5 - x.$$

Розв'язок. Задане рівняння та подібні до нього розв'язуються шляхом зведення до спільної основи. Для цього перетворимо праву сторону рівняння до вигляду

$$5 - x = \log_2 2^{5-x}$$

та підставимо у вихідне рівняння

$$\log_2\left(12 - 2^x\right) = \log_2 2^{5-x}.$$

Оскільки основи логарифмів рівні переходимо до показникового рівняння

$$12 - 2^x = 2^{5-x} = 2^5 \cdot 2^{-x}.$$

Виконуємо заміну змінних $2^x = t$ та зводимо до квадратного рівняння

$$12 - t = \frac{32}{t} \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0;$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 144 - 128 = 16;$$

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow t_1 = 8; t_2 = 4.$$

Після його обчислення повертаємося до попередньої заміни та обчислюємо

$$2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3;$$

$$2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2.$$

Отримали два прості розв'язки логарифмічного рівняння 2, 3.

7. Знайти розв'язок рівняння.

$$\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1.$$

Розв'язок.  Спростимо спочатку другий логарифм

$$2\log_{2^2}\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = \frac{2}{2}\log_2\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = \log_2\left(\sqrt{\lg x} + 1\right).$$

Потім записуємо доданки під один логарифм

$$\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - \log_2\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) =$$
$$= \log_2 \frac{\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1}{\sqrt{\lg x} + 1}.$$

Спрощуємо

$$\log_2 \frac{\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1}{\sqrt{\lg x} + 1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1}{\sqrt{\lg x} + 1} = 2^1 = 2 \Rightarrow$$

$$\lg x + 2\sqrt{\lg x} = 2\sqrt{\lg x} + 2 \Rightarrow$$

$$\lg x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100.$$

Розв'язування виявилося простішим, ніж виглядало до обчислень, а результат *x=100* лише підтверджує це.

При розв'язувані логарифмічних рівнянь потрібно добре знати їх властивості. Подальші обчислення зводяться до розв'язання квадратних рівнянь чи степеневих залежностей відносно невідомих.

Основний метод розв’язування логарифмічних нерівностей – зведення їх до найпростіших нерівностей, обидві частини яких – логарифми з однаковою основою. При розв’язуванні логарифмічних нерівностей використовують такі властивості монотонності логарифмічної функції: з двох логарифмів деяких чисел з однаковими основами, більшими від одиниці, більший той, число якого більше. З двох логарифмів деяких чисел з однаковими основами, більшими від 0, але меншими від 1, більший той, число якого менше. Якщо ліва частина нерівності є лінійною відносно деякого логарифм, а права є число, то обидві частини нерівності зводяться до логарифмів з однією основою. Нелінійні нерівності відносно логарифму розв’язують введенням нової змінної. Основні методи розв’язання логарифмічних нерівностей: 1) перетворення із застосуванням логарифмічних тотожностей з урахуванням ОДЗ; 2) Заміна нерівності рівносильною системою; 3) заміна змінної [5].

Звертаємо увагу, що обов’язковим є знаходження області допустимих значень. Системи, що містять логарифмічні рівняння, називаються системами логарифмічних рівнянь. При їх розв’язанні застосовують ті ж методи, що й при розв’язанні алгебраїчних рівнянь: метод підстановки; метод додавання; метод множення тощо. При цьому враховуються особливості розв’язання логарифмічних рівнянь. Розв’язуючи логарифмічні нерівності, доцільно використати загальну схему рівносильних перетворень нерівностей. Ця схема іноді дає надмірну систему обмежень, яку можна суттєво спростити. Для рівносильності рівнянь надмірність системи обмежень майже не впливає на об’єм роботи щодо розв’язування цих рівнянь - можна не знаходити відповідні значення змінної з цих обмежень, а тільки перевіряти для кожного знайденого кореня. Розв’язком нерівності, як правило, є інтервал (або кілька інтервалів), які містять нескінчену множину чисел, а всі їх перевірити неможливо. Отже для розв’язування нерівності доведеться знаходити відповідні значення змінної з усіх записаних обмежень, і тому чим менше залишиться цих обмежень, тим краще. Бажано запропонувати учням не знаходити окремо область визначення нерівності, а спочатку записувати повну систему обмежень і рівносильну нерівність, а потім намагатися спростити утворену систему [6].

Потрібно звернути увагу учнів на те, що при розв’язуванні логарифмічних нерівностей можна використовувати всі ті прийоми, які використовувалися при розв’язуванні логарифмічних рівнянь [2; 7].

Розв’язування деяких нерівностей за допомогою рівносильних перетворень досить громіздке, і тому використовуємо для розв’язування деяких нерівностей узагальнений метод інтервалів [2].

Розглянемо приклади [4; 5; 6]:

Приклад: 1.Розв'язати нерівність

$\log_{2,5}(2x) > 2.$

Розв'язання: Логарифмічну нерівність записуємо у вигляді системи двох нерівностей. Перша нерівність це умова на область допустимих значень, друга – рівняння, перетворене з логарифмічного (за властивістю логарифма)

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ \log_{2,5}(2x) > 2 = 2\log_{2,5}(2,5) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2,5}(2x) > \log_{2,5}(2,5)^2 \end{cases} \rightarrow$$

Основа логарифма більша одиниці, тому розкриваємо нерівність без зміни знаку нерівності

$2x > (2,5)^2 \rightarrow 2x > 6,25 \rightarrow x > 3,125.$

Знайдене значення не суперечить ОДЗ, таким чином розв'язком логарифмічного рівняння є інтервал

$x \in (3,125; +\infty).$

**2.** Розв'язати нерівність

$\log_{x-4}(x^2 - x - 6) > 0$ Обчислення: Задано логарифмічну нерівність, навіть можна сказати, що дві в одній. Оскільки в основі маємо функцію, то в залежності чи вона приймає значення більше одиниці чи менше нерівність трансформується на дві. Спочатку розглянемо випадок, коли основа більша одиниці. Записуємо обмеження на ОДЗ та розкриваємо нерівність

$$\begin{cases} x-4>1 \\ x^2-x-6>0 \\ x^2-x-6>(x-4)^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1+4 \\ x^2-x-6>0 \\ x^2-x-7>0 \end{cases} \rightarrow$$

Не вдаючись в деталі, розписуємо останню нерівність за теоремою Вієта

$$\begin{cases} x>5 \\ (x-3)(x+2)>0 \\ (2x-(1+\sqrt{29}))(2x-(1-\sqrt{29}))>0 \end{cases} \rightarrow$$

Звідси розв'язком є інтервал

$x\in(5;+\infty).$

Тепер розглянемо II випадок, коли основа є в межах від нуля до одиниці. При розкритті логарифма знак змінюємо на протилежний

$$\begin{cases} 0<x-4<1 \\ x^2-x-6>0 \\ x^2-x-6<(x-4)^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4<x<5 \\ (x-3)(x+2)>0 \\ x^2-x-7<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4<x<5 \\ (x-3)(x+2)>0 \\ (x-(1+\sqrt{29})(x-(1-\sqrt{29})<0 \end{cases} \rightarrow x\in(\varnothing).$$

На цьому інтервалі нерівність немає розв'язків. Правильна відповідь до завдання – інтервал від 5 до ∞

$x\in(5;+\infty)$

3.**Розв'язати нерівність**

$\log_{0,5}\frac{2x^2-8}{3x-21}\ge -1$ Розв'язання: ОДЗ логарифма знаходимо з умови, що дробова функція додатна

$$\frac{2x^2-8}{3x-21}>0 \rightarrow \frac{2(x^2-4)}{3(x-7)}>0 \rightarrow$$

$$\frac{2(x+2)(x-2)}{3(x-7)}>0 \rightarrow x\in(-2;2)\cup(7;+\infty).$$

ОДЗ складається з двох інтервалів. Далі розписуємо праву сторону логарифмічної нерівності

$$\log_{0,5}\frac{2x^2-8}{3x-21}\ge -\log_{0,5}\frac{1}{2} \rightarrow \log_{0,5}\frac{2x^2-8}{3x-21}\ge \log_{0,5}2.$$

Оскільки основа логарифма менша одиниці, то змінюємо знак при розкритті нерівності

$$\frac{2x^2-8}{3x-21} \le 2 \rightarrow \frac{2x^2-8}{3x-21} - 2 \le 0 \rightarrow$$

Далі все як із нерівностями зі шкільного курсу математики – переносимо доданки по один бік нерівності, зводимо до спільного знаменника, обчислюємо

$$\frac{2x^2-8-6x+42}{3(x-7)} \le 0 \rightarrow$$

$$\frac{2(x^2-3x+17)}{3(x-7)} \le 0.$$

Чисельник нерівності завжди більший нуля. Це випливає з того, що дискримінант квадратного рівняння менший нуля, а вільний член додатний. Отже, нерівність має місце коли знаменник від'ємний, а це дає умову $x<7$. Враховуючи ОДЗ, розв'язком нерівності буде інтервал *(-2; 2)*.

Головне при розв'язуванні логарифмічних рівнянь: не допустити втрати коренів та появи сторонніх. Потрібно знаходити ОДЗ та обов'язково робити перевірку. При потенціюванні (переході логарифмічного рівняння до алгебраїчного) може розширитись ОДЗ, що приводить до появи сторонніх коренів. Перевірка дає змогу виявити та виключити сторонні корені [1].

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей робити перевірку неможливо, тому обов'язково необхідно знаходити ОДЗ [1].

**Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.** На мою думку, тема «Логарифмічні рівняння та нерівності» є доступною для вивчення учнями старших класів.

Подальші пошуки у напрямі дослідження цієї проблеми можуть бути пов'язані зі складанням та розв'язуванням математичних, фізичних, економічних задач прикладного характеру, котрі стосуються різноманітних сфер життя, що в свою чергу матиме позитивний вплив на теоретичні та практичні знання, уміння та навички учнів старшої школи.

Матеріали статті будуть корисні для старшокласників як при вивченні даної теми, так і при підготовці до складання ними ЗНО.

## Список використаної літератури

1. Кушнір В.А. Технологія розвязування та конструювання логарифмічних рівнянь та нерівностей з позиції їх перетворень / В.А.Кушнір //Математика в рідній школі: наук.журнал. -2016. - № 5. – с.39-46.

2. Логарифмічні рівняння // Математика. – 2004. – квітень (№ 14). с 7-10.

3. Логарифмічні та показникові нерівності // Математика в школі. – 2004. - № 1. с.20-22.

4. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2011. – 431 с. : іл.

5. Розв’язування логарифмічних нерівностей / Н.М. Повзло // Математика в школах України. – 2006. – квітень (№ 11). с. 7-17.

6. Систематизація методів розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей/ Т.І. Іванко // Математика в школах України.- 2007. – березень (№ 7). С. 16-21.

7. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.,: «Зодіак-ЕКО», 2000.

## Відомості про автора:

*Самойленко Людмила Вікторівна – студентка ІІ курсу рівня магістр фізико-математичного факультету Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380984091938, м. Кропивницький.*