УДК 372.851:514

ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ПОХІДНОЇ В ШКМ

Гермаш Ольга

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ключник І.Г.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто основні методи організації самостійної роботи учнів при вивченні похідної в шкільному курсі математики, а саме рівні самостійної продуктивної діяльності учнів. Показано приклади розв'язування задач на застосування похідної в шкільному курсі математики, а також дослідження функції та побудова її графіка, розроблено ряд вправ для самоперевірки учнів при вивченні цієї теми.

Ключові слова: *похідна, границя функції, графік функції, диференціювання.*

Organization of pupils 'independent work in studying scientific studies

O. Germash

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical sciences, Docent Kliuchnyk I.G.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with the basic methods of organizing students 'independent work when studying a derivative in a school mathematics course, namely the levels of students' independent productive activity. Examples of solving problems for applying a math derivative in a school mathematics course, as well as studying the function and plotting it are shown, and a series of exercises for students' self-examination in learning this topic are developed.

Keywords: *derivative, function boundary, function graph, differentiation.*

Постановка проблеми. Розділ алгебри та початків аналізу «Похідна та її застосування» займає значне місце у шкільному курсі математики. Вивчення похідної на поглибленому рівні його дає змогу розвивати в учнів просторове та логічне мислення, алгоритмічну, інформаційну та математичну культуру, формує такі позитивні якості учня, як наполегливість, культура думки і поведінки, обґрунтованість суджень тощо. Саме в 60—70-і роки XVII століття сталося найвидатніше відкриття усіх часів — створення нової математичної теорії: диференціальне і інтегральне числення. Як сказав французький вчений

Л. Карно: «Перша умова, якої треба дотримуватися у математиці – бути точним, друга – бути ясним і наскільки можливо, простим»

Аналіз досліджень і публікацій. Значний внесок у розвиток самостійної роботи учнів у процесі навчання внесли видатні методисти такі, як Слєп-кань З.І., Бурда М. І., педагоги: Данилов М. А., Єсіпов Б. П. та інші. Їх дослідження показали, що одним з ефективних засобів розвитку самостійності і творчої активності учнів є самостійна робота. Під час виконання самостійної роботи учні краще засвоюють теоретичний матеріал та швидше набувають практичних навичок виконання завдань на застосування похідної.

Мета статті: Розглянути основні способи та методи підвищення самостійної роботи учнів. Розробити перелік завдань на застосування похідної в шкм для самоперевірки учнів, а також навести приклади на застосування похідної.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Велику роль відіграє поняття похідної в науці і техніці: прискорення – є похідна від швидкості за часом, теплоємність тіла – є похідна від кількості тепла по температурі, швидкість радіоактивного розпаду – є похідна від маси радіоактивної речовини за часом і т.п. Вивчення властивостей і способів обчислення похідних і їх застосування до дослідження функцій складає головний предмет диференціального числення. Тому пропонуємо декілька варіантів розв'язаних прикладів, що зустрічаються в шкільному курсі алгебри [1].

Приклад 1. Знайти похідну функції.

$y=\dfrac{1+tgx}{1-tgx}.$

$$y'=\frac{(1+tgx)'(1-tgx)-(1-tgx)'(1+tgx)}{(1-tgx)^2}=\frac{\dfrac{1-tgx}{\cos^2 x}+\dfrac{1+tgx}{\cos^2 x}}{(1-tgx)^2}=\left[\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{tgx}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{tgx}{\cos^2 x}\right]/$$

$$/(1-tgx)^2=\frac{2}{\cos^2 x(1-tgx)^2}=\frac{2}{\cos^2 x\left(1-2\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\frac{2}{\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x}=$$

$$=\frac{2}{1-\sin 2x}.$$

Приклад 2. На підставі означення похідної, знайти похідну функції в точці x_0, якщо:

$$y=\sqrt[3]{x^2},\, x_0=8.$$

$$\Delta x\Rightarrow \Delta y=\sqrt[3]{(x_0+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x_0^2}=\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}-4;$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}-4\right)\left(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^4}+4\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+16\right)}{\Delta x(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^4}+4\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+16)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(8+\Delta x)^2-4^3}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^4}+4\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+16\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{64+16\Delta x+\Delta x^2-64}{\Delta x(\sqrt[3]{(8+\Delta x)^4}+4\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+16)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16+\Delta x}{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^4}+4\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+16}=\frac{16}{16+16+16}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 3.Дослідити на екстремум функцію

$$f(x)=(x+1)e^{-5x}.$$

Розв'язання. Функція $f(x)=(x+1)e^{-5x}$ визначена і диференційована на R. Її похідна

$$f'(x)=e^{-5x}-5(x+1)e^{-5x}=e^{-5x}(1-5x-5)=e^{-5x}(-5x-4)$$

дорівнює нулю при $x=-\dfrac{4}{5}$.

Ця критична точка розбиває числову пряму на два інтервали знакосталості похідної $f'(x)$: $\left(-\infty;-\dfrac{4}{5}\right),\left(-\dfrac{4}{5};+\infty\right)$.

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$ $f'(x)<0$, то функція f в точці $x=-\frac{4}{5}$ має локальний максимум.

Його значення $f_{\max}(x)=f(-\frac{4}{5})=\frac{1}{5}e^{4}$

Приклад 4. Знайти проміжки зростання та спадання функції

$$f(x)=\frac{7}{3}x^{3}-\frac{5}{2}x^{2}-2x+3$$

Розв'язання. Функція визначена і диференційована на множені R.

Знайдемо її похідну $f'(x)=7x^{2}-5x-2$.

Нулями похідної є $x_1=1$, $x_2=-\frac{2}{7}$.

Оскільки похідна неперервна, то вона зберігає знак на інтервалах $\left(-\infty;-\frac{2}{7}\right),\left(-\frac{2}{7};1\right),(1;+\infty)$. Оскільки похідна задана квадратним тричленом з додатним коефіцієнтом при x^2, то вона набуває додатних значень поза коренями, тобто $f'(x)>0$ на інтервалах $\left(-\infty;-\frac{2}{7}\right),(1;+\infty)$ і від'ємних між коренями, тобто $f'(x)<0$ на інтервалі $\left(-\frac{2}{7};1\right)$.

Отже , на інтервалах $\left(-\infty;-\frac{2}{7}\right),(1;+\infty)$ функція f зростає, а на інтервалі $\left(-\frac{2}{7};1\right)$ – спадає [2].

Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку [a;b]

$$f(x)=\frac{1}{5}x^{5}+4x^{2}$$

Розв'язання. Функція визначена і неперервна на відрізку $[-1;1]$, диференційна в інтервалі (-1;1). Тому вона набуває на даному відрізку найбільшого і найменшого значення. Знайдемо критичні точки даної функції. Для цього знайдемо похідну

$$f'(x)=x^{4}+8x$$

і прирівняємо її до нуля:

$$x^4+8x=0; \ x=0; \ x=-2.$$

Отже, на інтервалі (-1;1) функція має лише одну критичну точку x=0. знайдемо значення функції в цій точці $f(0)=0$.

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка

$$f(-1)=-\frac{1}{5}+4=3\frac{4}{5}, \qquad f(1)=\frac{1}{5}+4=4\frac{1}{5}.$$

Отже,

$$\min_{[-1;1]} f(x)=f(0)=0, \qquad \max_{[-1;1]} f(x)=f(1)=4\frac{1}{5}$$

Відповідь: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=0$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=4\frac{1}{5}$ [4].

Приклад 6. Дослідити методами диференціального числення функцію

$y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

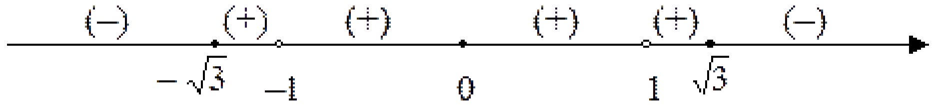
1. Область визначення: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Точки розриву $x=1, \ x=-1$.

2. Якщо $x=0$, то $y=0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0;0)$.

3. Функція не періодична. Оскільки $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-f(x)$, то функція непарна, а отже графік функції симетричний відносно початку координат.

4. $y'=\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}=0$. Розв'язком даного рівняння є $x=0, \ x=\pm\sqrt{3}$.

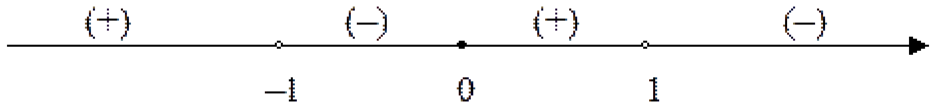
Похідна не існує в $x=\pm 1$. Знайдемо знаки y' на проміжках:



Отже, на $(-\infty; -\sqrt{3}]$ – функція спадає,
на $[-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0] \cup [0; 1) \cup (1; \sqrt{3}]$ – функція зростає,
на $[\sqrt{3}; +\infty)$ – функція спадає.

У точках $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ функція має локальний екстремум: $x = \sqrt{3}$, $y(\sqrt{3}) = -2{,}6$ – локальний максимум, $x = -\sqrt{3}$, $y(-\sqrt{3}) = 2{,}6$ – локальний мінімум.

5. Знаходимо y'': $y'' = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$. Похідна $y'' = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$. Знайдемо знаки y'' на проміжках:



Отже, на $(-\infty; -1) \cup [0; 1)$ – крива ввігнута, на $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ – крива опукла.

6. $x = 1$, $x = -1$ – вертикальні асимптоти кривої. Знайдемо похилу асимптоту кривої $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(1 - x^2)x} = -1, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3}{1 - x^2} - (-1)x\right) = 0, \quad y = -x$$
– похила асимптота.

7. Враховуючи проведені дослідження будуємо графік функції.

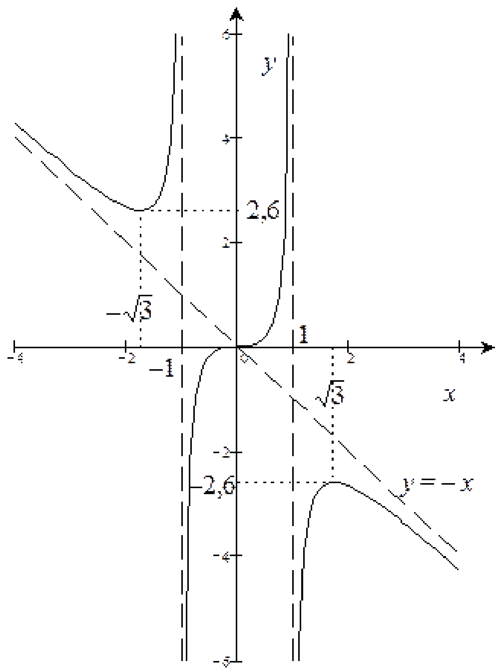


Рис 1.

Для того, щоб учні мали змогу самостійно вивчати і опрацьовувати матеріал, є ряд перевірених практикою шляхів підвищення ефективності уроку, активізації пізнавальної діяльності учнів на уроці є відповідна організація самостійної навчальної роботи. Вона займає особливе місце на сучасному уроці, тому що учень набуває знань тільки в процесі особистої самостійної навчальної діяльності. Передові педагоги завжди вважали, що на уроці учні повинні працювати по можливості самостійно, а вчитель – керувати їхньою самостійною роботою. Між тим, у школі не часто можна бачити самостійні роботи, які б були спрямовані на формування прийомів пізнавальної діяльності. Школярів мало навчають способам і прийомам самостійної роботи [5].

Розглянемо основні вимоги до організації самостійної діяльності учнів на уроці. Будь-яка самостійна робота на будь-якому рівні має конкретну мету. Кожен учень знає порядок і прийоми виконання роботи. Самостійна робота відповідає навчальним можливостям учня, а ступінь складності задовольняє принцип поступового переходу від одного рівня самостійності до іншого, забезпечуючи поєднання різних видів самостійної роботи. Призначення самостійної роботи — розвиток пізнавальних здібностей, творчого мислення, ініціативи в прийнятті рішення.

В практиці навчання кожен тип самостійної роботи представлений різноманітністю видів робіт, що використовуються в системі урочних та позаурочних занять.

1. Робота з підручником
2. Вправи: тренувальні, відтворюючі і за зразком, складання завдань та запитань і їх розв'язання, рецензування відповідей інших учнів, оцінка їх діяльності, вправи, спрямовані на вироблення практичних умінь та навичок.
3. Розв'язання різноманітних завдань та виконання практичних і лабораторних робіт.
4. Різноманітні завдання для самоперевірки, контрольні роботи, диктанти, твори.
5. Підготовка доповідей та рефератів.
6. Виконання індивідуальних та групових завдань.
7. Домашні лабораторні досліди та спостереження.
8. Технічне моделювання та конструювання [3].

Для закріплення та систематизації знань учнів пропонуємо короткі тести для самоперевірки засвоєних знань з тем:

Тест 1.

Знайти похідну функції

1) $y = 4x^5 + 4x$;

А) $20x^4 + 4$	Б) не має правильної відповіді	В) $20x^5$	Г) $5x^4 + 4$

2) $y = \dfrac{3x^2 - 5}{5x + 3}$

А) $\dfrac{27x^2 + 18x + 25}{(5x+3)^2}$	Б)не має правильної відповіді	D) $\dfrac{6x}{(5x+3)^2}$	Г) $\dfrac{27x^2 + 25}{(5x+3)^2}$

3) $y = \dfrac{5}{2x + 6}$

А) $-\dfrac{5}{(2x+6)^2}$	Б) $\dfrac{5}{(2x+6)^2}$	В) $\dfrac{10}{(2x+6)^2}$	Г) не має правильної відповіді

4) $y=\sin 2x$;

А)не має правильної відповіді	Б) $2\cos 2x$	В) $-2\cos x$	Г) $-2\cos 2x$

5) $y=\dfrac{ax+bx^2}{am+bm^2}$;

А) $-\dfrac{a+2bx}{ax+2bm}$	Б)не має правильної відповіді	В) $\dfrac{a+2bx}{am+bm^2}$	Г) $\dfrac{a+2x}{a+2b}$

Тест 2.

Знайти інтервали зростання та спадання функції

1) $y=1+\dfrac{2}{x}$

А) не має правильної відповіді	Б)*спадає*- $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	В)*зростає* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	Г) *спадає*- $(0;+\infty)$

2) $y=\sqrt{x}$

А)*зростає* $(0;+\infty)$	Б) не має правильної відповіді	В) *спадає*- $(0;+\infty)$	Г) *зростає* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

3) $y=\dfrac{3}{x-2}$

А) *спадає*- $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	Б) *спадає*- $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$	В) не має правильної відповіді	Г) *зростає* $(0;+\infty)$

4) $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x-2$

А) *зростає* $(-\infty;+\infty)$	Б) *спадає*- $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$	В) не має правильної відповіді	Г) *спадає*- $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

5) $y=\dfrac{5}{x+1}$

А)*спадає*- $(-\infty;-1)^3(-1;\infty)$	Б) не має правильної відповіді	В) *зростає* $(-\infty;+\infty)$	Г) *зростає* $(0;+\infty)$

Тест 3.

Знайти точки мінімуму та максимуму функції

1) $y = x^4 - 8x^2 + 5$

А) $x_{\min} = -2; x_{\min} = 2; x_{\max} = 0$	Б) не має правильної відповіді	В) $x_{\min} = -2; x_{\max} = 2$	Г) $x_{\min} = 3$

2) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

А) $x_{\min} = \frac{3}{2}$	Б) $x_{\min} = 3$	В) не має правильної відповіді	Г) $x_{\min} = 0; x_{\max} = -1; x_{\max} = 1$

3) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$

А) $x_{\min} = 6$	Б) $x_{\min} = \frac{3}{2}$	В) не має правильної відповіді	Г) $x_{\min} = 2$

4) $y = (x+4)^4(x-3)^3$

А) $x_{\min} = 0; x_{\max} = -4$	Б) $x_{\min} = 2$	В) не має правильної відповіді	Г) $x_{\min} = \frac{3}{2}$

5) $y = \sin x \sin(x - \frac{\pi}{4})$

А) $x_{\min} = \frac{\pi}{8} + \pi\kappa, x_{\max} = -\frac{3\pi}{8} + \pi\kappa; \kappa \in z$	Б) не має правильної відповіді	В) $x_{\min} = 2$	Г) $x_{\min} = 0; x_{\max} = \frac{4\pi}{5} + \pi\kappa; \kappa \in z$

Тест 4.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на вказаному відрізку

1) $y = 2x^3 - 9x^2 - 3$; [-1;4]

А) 13;4	Б) не має правильної відповіді	В) 0; -$\frac{16}{3}$	Г)-3; -30

2) $y = \sqrt{0,5x^2 + 3x + 5}$; [2;4]

А) 10; 6	Б)5; $\sqrt{13}$	В) не має правильної відповіді	Г) 0; -$\frac{16}{3}$

3) $y = (x-1)^2(x+5)^2$;[-3;2]

А) 81;0	Б) 0; - $\frac{16}{3}$	В) 5; $\sqrt{13}$	Г) не має правильної відповіді

4) $y=-x-\frac{9}{x}$; [-6;-1]

А) 10; 6	Б) 5; $\sqrt{13}$	В) 10;6	Г) не має правильної відповіді

5) $y=2\sin 2x+\cos 4x;[0;\frac{\pi}{3}]$

А) $\frac{3}{2};1$	Б) не має правильної відповіді	В) 10; 6	Г) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2};\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. В статті показано різні методи та способи організації самостійної роботи учнів, а також наведені різні приклади розв'язування задач на тему застосування похідної в шкм. Розроблено короткі тести для перевірки знань учнів.

Список використаної літератури

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальній посібник / Бевз Григорій Петрович. – 3-те видання, доповнене і перероблене.– К.: Вища школа, 1989. – 369 с.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – Ч. 1. – 256 с.: іл.
3. Слепкань З.І. Методи навчання математики : підручник / З. І. Слєпкань . – 2-е вид., доп. і перероб . – Київ : Вища школа, 2006 . – 582 с.
4. Горделадзе Ш.Г . Збірник конкурсних задач з математики / Ш. Г Горделадзе., М. М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук. – Навч. Посібник.- К.:Вища шк., 1988.-328 с.
5. Навчальні матеріали онлайн. Факультативи, спецкурси і спецсемінари як форми організування навчання [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://pidruchniki.com/70153/pedagogika/fakultativi_spetskursi_spetsseminari_formi_organizuvannya_navchannya. . – Назва з екрану. – Мова укр.

Відомості про автора:

Гермаш Ольга Вікторівна – студентка ІІ курсу рівня магістр фізико-математичного *факультету Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380661211401, e-mail: stepcall7002@gmail.com, м. Кропивницький.*