УДК 372.851:514

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Савчук Оксана

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто методичні особливості розв'язування геометричних задач із розділу «Аксіоми стереометрії. Паралельність у просторі»; розглянуто типові позиційні і метричні задачі шкільного курсу геометрії з цієї теми, які проілюстровано розв'язаннями.

Ключові слова: *паралельність у просторі, взаємне положенням прямих у просторі, переріз многогранника площиною.*

Methodical peculiarities of study of parallelism of lines in space

Oksana Savchuk

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor Iziumchenko L.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with methodical peculiarities of solving geometric problems from the course "Axioms of stereometry. Parallelism in space"; the typical positional and metric problems of the school geometry course on this topic are illustrated by the solutions.

Keywords: *parallelism in space, relative position of lines in space, plane section of a polyhedron.*

Постановка проблеми. Педагогічна наука в Україні за останні десятиріччя накопичила значний потенціал щодо теоретичного обґрунтування різних аспектів підвищення ефективності навчання геометрії в сучасній школі. Вдосконалення геометричної освіти учнів є багатогранною проблемою, розв'язання якої вимагає від вчителя глибокого опанування основ геометрії, вміння організувати навчально-пізнавальну діяльність учнів для сприйняття, осмислення, засвоєння геометричних знань та умінь, вміння бачити й використовувати внутрішньо предметні й міжпредметні зв'язки, прикладну спрямованість навчання геометрії тощо. Розділ геометрії, предметом якого є вивчення просторових геометричних фігур, є стереометрія, першою темою якого є «Аксіоми стереометрії. Паралельність у просторі». Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що для учнів дуже складними є геометричні задачі взагалі, особливо позиційні стереометричні задачі. Про це свідчать підсумки зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які стверджують, що значна кількість учнів навіть не приступають до їхнього виконання.

Аналіз досліджень і публікацій. У становлення шкільного курсу геометрії значний внесок зробили українські методисти-математики О.М. Астряб, Г.П. Бевз, М.І. Бурда, О.С. Дубинчук, О.С. Істер, Є.П. Нелін, О.В. Погорєлов, З.І. Слєпкань, І.Ф. Тесленко, О.В. Школьний та інші. Сучасні дослідження особливостей навчання учнів геометрії спираються на роботи вітчизняних учених з теорії і методики навчання математики в школі, серед яких провідну роль грають дослідження В.Г. Бевз, М.І. Бурди, М.І. Жалдака, О.П. Зеленяка, О.М. Коломієць, О.І. Матяш, Мерзляка А.Г., С.А. Ракова, О.І. Скафи, Н.А. Тарасенкової, О.С. Чашечникової, В.О. Швеця та ін.

Мета статті: Проаналізувати задачі із геометрії, зокрема, геометричні задачі на паралельність прямих у просторі; висвітлити методичні аспекти розв'язування таких задач.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Програмовий матеріал десятого класу передбачає ознайомлення учнів з основними властивостями і способами задання площин і прямих на базі системи аксіом та наслідків з них; передбачає надання учням систематичних знань про паралельність прямих і площин в просторі, вивчення поняття кутів між прямими і площинами [1]. У нашій статті ми хотіли б зупинитися на паралельності прямих у просторі, акцентувати увагу на метричних та позиційних задачах з цієї теми.

Наведемо декілька задач, створених *самостійно*, які сформульовані у форматі ЗНО з теми «Аксіоми стереометрії. Паралельність у просторі» (задачі 1,2):

Задача 1. Трикутник ABC не перетинає площину α. Через його вершини A, B, C і середини F та G сторін AC і AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1, B_1, C_1, F_1 і G_1, відповідно (див. рис.). 1) Визначте довжини відрізків CC_1 і GG_1 (у см), якщо AA_1=13 см, BB_1=9 см, FF_1=12 см. 2) Встановіть вид чотирикутника GG_1C_1C.

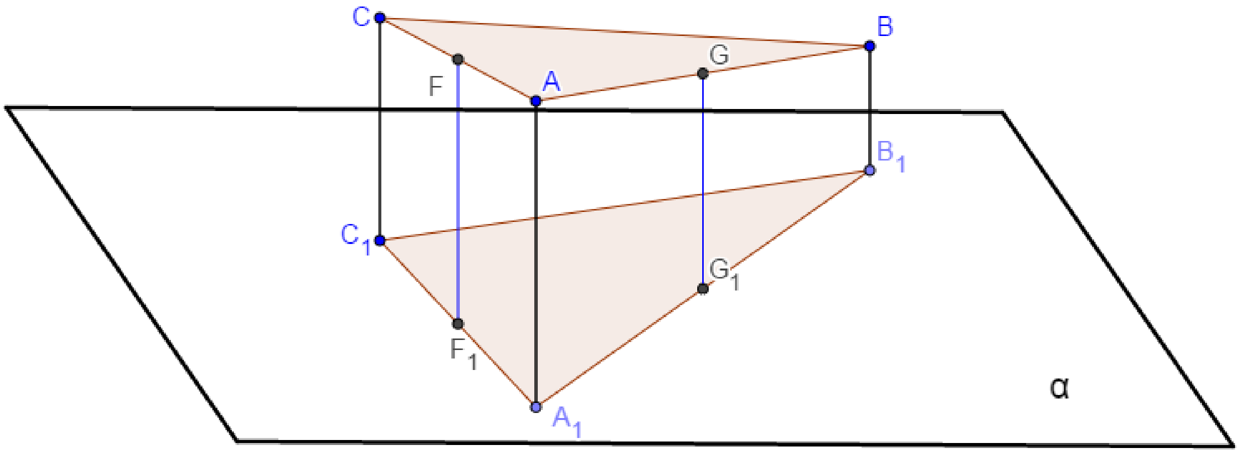
Розв'язання.

З паралельності прямих $AA_1 \| BB_1$ випливає, що через них можна провести єдину площину, тобто усі точки A, A_1, B, B_1 лежать в одній площині, а це означає, що:

1) чотирикутник ABB_1A_1 є плоским;

2) оскільки $AA_1 \parallel BB_1$ і $AA_1 \neq BB_1$, то він є трапецією;

3) GG_1 є середньою лінією трапеції ABB_1A_1, а тому $GG_1=(AA_1+BB_1)/2=(13+9)/2=11$ см.

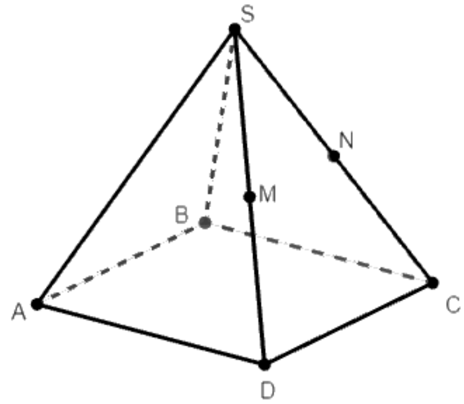


Аналогічно, ACC_1A_1 є трапецією, FF_1 – середня лінія, а тому $CC_1=2\cdot FF_1 - AA_1$, звідки $CC_1=2\cdot 12 - 13 =11$ см.

Оскільки $CC_1 \parallel GG_1$ і $CC_1 = GG_1$, то чотирикутник GG_1C_1C є паралелограмом.

***Відповідь*: GG_1=CC_1=11 см; чотирикутник GG_1C_1C є паралелограмом.**

Задача 2. Дано правильну чотирикутну піраміду *SABCD*, кожна бічна грань якої є правильний трикутник зі стороною 2*c*. Точки *M* та *N* є відповідно серединами ребер *SD* та *SC*. Точка *O* – центр основи піраміди. Через точки *M*, *N* та *O* проведено переріз піраміди

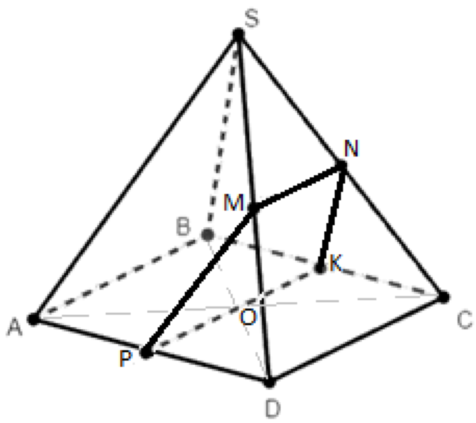


площиною. Укажіть вид перерізу та знайдіть його периметр.

Розв'язання.

MN – середня лінія трикутника SCD, $MN=DC/2=2c/2=c$; $MN||DC$. Оскільки через три точки M, N та O проходить січна площина, яка перетинає одну (SDC) з двох площин (SDC; $ABCD$) по прямій MN, яка паралельна до лінії їхнього перетину CD, то і другу площину вона перетинає по прямій (що проходить через точку O), яка паралельна до лінії їхнього перетину CD. А тому через точку O в основі (квадраті $ABCD$) проводимо пряму PK, паралельну до CD.

Оскільки $PK||CD$; $MN||CD$, то за ознакою паралельності у просторі $PK||MN$ (транзитивність відношення паралельності).



PK – середня лінія квадрата, тобто $PK=2c$. $PK||MN$, $PK=2c$; $MN=c$; $PK \neq MN$, а тому $PKNM$ є трапецією. PK – середня лінія квадрата, тобто P, K – середини сторін AD; BC. А тоді PM є середньою лінією трикутника SAD, $PM=SA/2=c$. NK є середньою лінією трикутника SBC, $NK=SB/2=c$.

А тому трапеція є рівнобічною. Периметр трапеції дорівнює: $2c+c+c+c=5c$.

Відповідь: рівнобічна трапеція, периметр дорівнює $5c$.

Наведемо приклад двох задач з теми, *умови* яких взято із збірників для підготовки до ЗНО:

Задача 3. Пряма a перетинає площину α в точці A. Точки B і C належать прямій a, причому $AC:CB=3:2$. З точок B та C проведені паралельні прямі, що перетинають площину α в точках B_1 та C_1 відповідно. Визначте довжину відрізка CC_1, якщо $BB_1=10$ см. [2]

А	Б	В	Г	Д
6 см	5 см	30 см	5 см або 15 см	6 см або 30 см

Розв'язання.

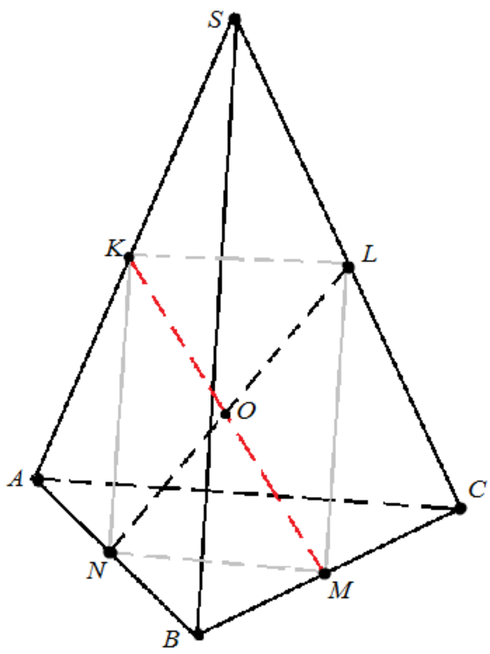
Зауважимо, що задача не є визначеною, оскільки є дві можливості розташування точок A, B і C:

– вектори AC і CB співнапрямлені, тобто точки лежать у порядку A, C, B ($AC+CB=AB$; з умови маємо $AC:CB=3:2$, а тому $AC:AB=3:5=k$; трикутники ACC_1 та ABB_1 подібні з коефіцієнтом подібності k, а тому $AC=k \cdot AB=6$ см);

– вектори AC і CB протилежно напрямлені, враховуючи, що $AC:CB=3:2$, тобто точки лежать у порядку A, B, C ($AB+BC=AC$; з умови маємо $AC:CB=3:2$, а тому $AC:AB=3:1=k$; трикутники ACC_1 та ABB_1 подібні з коефіцієнтом подібності k, а тому $AC=k \cdot AB=30$ см).

Правильна *відповідь*: Д.

Як правило, задачі підвищеного рівня формулюють у форматі ЗНО декількома питаннями, наприклад:



Задача 4. $SABC$ – просторовий чотирикутник (тетраедр), точки K, L, M, N – середини сторін (ребер тетраедра) SA, SC, CB, AB, відповідно. Довжини $SB=10$ см; $AC=8$ см.

1. Доведіть, що середини протилежних сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма [3, с. 8].

2. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл [3, с. 8].

3. Обчисліть периметр $KLMN$.

Розв'язання.

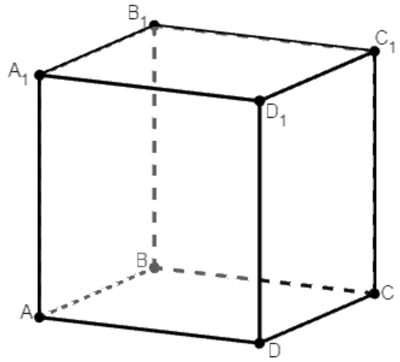
У трикутнику SAC відрізок KL є середньою лінією трикутника, а тому $KL \parallel AC$, $KL=AC/2=4$ см. У трикутнику ABC відрізок MN є середньою лінією трикутника, а тому $MN \parallel AC$, $MN=AC/2=4$ см. Оскільки у чотирикутнику $KLMN$ протилежні сторони паралельні і рівні, то він є паралелограмом (перший пункт задачі доведений). Оскільки KM і LN є діагоналями паралелограма, то вони перетинаються і точкою перетину діляться навпіл (другий пункт задачі доведений).

У трикутнику *SAB* відрізок *KN* є середньою лінією трикутника, а тому $KN \| SB$, $KN = SB/2 = 5$ см. Периметр паралелограма $P = 2\cdot(a+b) = 2\cdot(4+5) = 18$ см.

***Відповідь*: 18 см.**

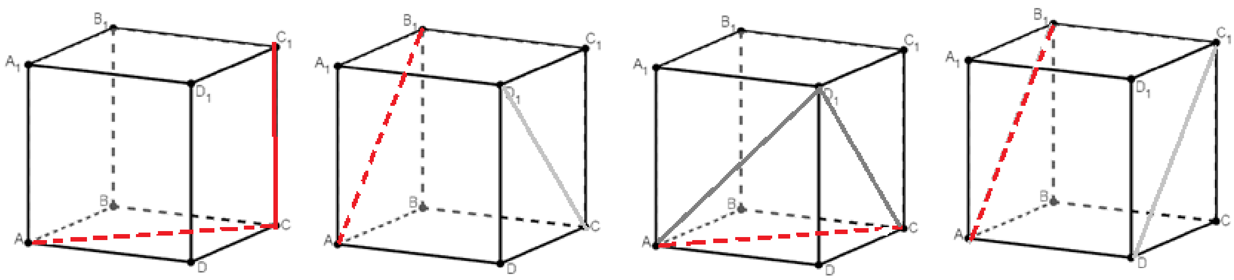
Наведемо приклад завдання ЗНО з математики цього року з даної теми.

Задача 5. (ЗНО, 2019 р., основна сесія). На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих (1-4) та їх взаємним розташуванням (А–Г) [4].



Пара прямих	**Взаємне розташування**
1. AC й CC_1	**А** прямі паралельні
2. AB_1 і CD_1	**Б** прямі мимобіжні
3. AC й CD_1	**В** прямі перетинаються й утворюють прямий кут
4. AB_1 і C_1D	**Г** прямі перетинаються й утворюють кут 45^o
	Д прямі перетинаються й утворюють кут 60^o

Розв'язання.



У першому випадку маємо пряму CC_1, яка перпендикулярна до площини основи *ABCD*, а тому перпендикулярна до усіх прямих основи, а отже, і до прямої *AC*, яка лежить у основі. При цьому пряма CC_1 має з *AC* спільну точку *C*. А тому прямі перетинаються й утворюють прямий кут. Відповідь: 1В.

У другому випадку маємо дві прямі, які лежать у паралельних гранях, але не є паралельними, а тому є мимобіжними (пряма AB_1 лежить у площині AB_1CD_1, а пряма CD_1 перетинає цю площину у точці перетину діагоналей грані C_1CDD_1; за ознакою мимобіжності, ці прямі мимобіжні. Відповідь: 2Б.

У третьому випадку прямі *AC*, CD_1, AD_1 утворюють рівносторонній трикутник, а тому прямі AC, CD_1 перетинаються й утворюють кут 60^o. Відповідь: 3Д.

У четвертому випадку маємо паралельні прямі. Відповідь: 4А.

Правильна *відповідь*: 1В; 2Б; 3Д; 4А.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Чергування позиційних і метричних задач з теми «Аксіоми стереометрії. Паралельність у просторі» сприяє кращому розумінню та засвоєнню теми, поглибленню знань школярів з геометрії у цілому.

Наведені приклади завдань можуть бути використані під час проведення уроків геометрії у десятому класі та при підготовці учнів до написання сертифікаційної роботи зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Список використаної літератури

1. Навчальна програма для 11-річної школи з математики / https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

2. Ізюмченко Л.В. Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (стереометрія) / Л.В. Ізюмченко, Ю.В. Ботузова, Л.А. Ткаченко. – Кропивницький: КОІППО імені Василя Сухомлинського, 2018. – 121 с.

3. Литвиненко Г.М. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина II: Геометрія. 10-11 клас / Г.М. Литвиненко, Л.Я. Федченко, В.О. Швець. – Львів: Вид-во науково-технічної літератури, 1997. – 80 с.

4. https://zno.osvita.ua/mathematics/