УДК 517.0

ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІК ТА МЕТОДИ ЇХ ДОДАВАННЯ

Нетреба Юлія

Науковий керівник: професор Волков Ю. І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Стаття присвячена короткій характеристиці гармонік, які являються найпростішими, і в той же час дуже важливими періодичними функціями. У статті розкриваються властивості гармонік, методи додавання гармонік з однаковими та різними частотами.

Ключові слова: *алгебра та початки аналізу, періодичні функції, гармоніки.*

Definition of harmonics and the methods of adding them

Ju. Netreba

Scientific supervisor: professorVolkov Yu.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The Article is devoted short description of accordions which appear the simplest, and at the same time by very important periodic functions. Properties of accordions open up in the article, methods of addition of accordions with identical and different frequencies.

Keywords: *algebra and beginnings of analysis, periodic functions, harmonics.*

Постановка проблеми. Знайомство з періодичними функціями починається в шкільному курсі математики при вивченні тригонометричних функцій. Так на уроках алгебри і початків аналізу розглядаються найбільш відомі періодичні функції: $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $\ldots$. З періодичними функціями доводиться зіштовхуватись в багатьох додатках математики до задач фізики і техніки. Питання пов’язані з періодичністю функцій є дуже важливими, як для реалізації міжпредметних зв’язків (особливо з фізикою), так і для пропедевтики в школі ідей гармонійного аналізу, інших розділів математики.

Найпростішими, і в той же час дуже важливими періодичними функціями являються гармоніки. Саме гармонічний аналіз є одним із найважливіших математичних засобів електро- і радіотехнолога. А в наш час, коли великим попитом користуються робітничі професії, буде корисно поповнити свій інформаційний арсенал знаннями, що допоможуть у засвоєнні всього циклу професійних дисциплін.

В курсі математичного аналізу вищої школи по-різному підходять до вивчення теми гармонік. Крім того, існує чимало гарних підручників та посібників, присвячених гармонічному аналізу. Але виклад матеріалу в них не завжди доступний розумінню учня старшої школи та студента і потребує від читача чималих математичних знань. До того ж для їх вивчення потрібно витратити багато часу.

Аналіз досліджень і публікацій. В традиційних класичних курсах тригонометрії питанням дослідження функцій на періодичність, вивченню властивостей періодичних функцій приділялось дуже мало уваги. Ці речі мають особливе значення для учнів старшої школи, які поглиблено вивчають математику та учнів професійно-технічних закладів освіти.

Видатні математики та педагоги. А. М. Колмогоров, Н. Я. Віленкін, С. І. Шварцбурд, М. Й. Ядренко, М. І. Шкіль досліджували місце періодичних функцій в шкільному курсі математики. В результаті, в підручниках, створених А. М. Колмогоровим, Б.Є. Вейцем, І.Т. Демидовим, О.С. Івашевим-Мусатовим, С. І. Шварцбурдом, а також в сучасних українських підручниках, створених М. І. Шкілем, З. І. Слепкань, Т. М. Хмарою, О. С. Дубінчук, Т. В. Колесник, Є. І. Неліним, Я. С. Бродським питання дослідження періодичних функцій стали займати гідне місце. Методика послідовного ознайомлення учнів з поняттям періодичної функції детально описана З. І. Слєпкань. Додатковою дидактичною базою, де зібрана значна кількість задач на дослідження періодичних функцій, доведення їх властивостей, стали посібники розроблені В. В. Вавіловим, І. І. Мельніковим, С. Н. Олехником, П. І. Пасіченко, М. Л. Галицьким, М. М. Мошковичем, Б. М. Івлевим, С. М. Саакяном, Є. С. Кочетковим, А. І. Худобіним. Значна робота в цьому напрямку зроблена вітчизняними провідними педагогами М. С. Якіром, В. Б. Полонським, А. Г. Мерзляком, Ю. М. Рабіновичем.

В той же час дослідники відмічають значні труднощі, з якими зустрічаються учні при вивченні властивостей періодичних функцій. Це обумовлено як глибиною поняття періодичної функції, так і складністю задач на дослідження періодичних функцій. Стає очевидним, що ознайомлення з усім спектром задач, пов'язаних з періодичними функціями не можливе тільки при вивченні теми "Тригонометричні функції". Ці питання повинні обговорюватися при вивченні майже всіх тем курсу алгебри та початків аналізу.

Мета статті: полягає у тому, щоб розглянути гармоніки, як найпростіші періодичні функції та за короткий термін оволодіти поняттями, за допомогою яких можна буде виконати різні елементарні операції над ними.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Означення гармоніки. Багато фізичних процесів, наприклад, вільне коливання математичного маятника, змінний струм в коливному контурі та ін. описуються диференціальним рівнянням

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad (1)$$

Загальний розв'язок цього рівняння, як відомо, можна записати у вигляді

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Де A і φ довільні сталі, якщо будуть задані початкові умови $x(0) = x_0$, $x'(0) = V_0$, то

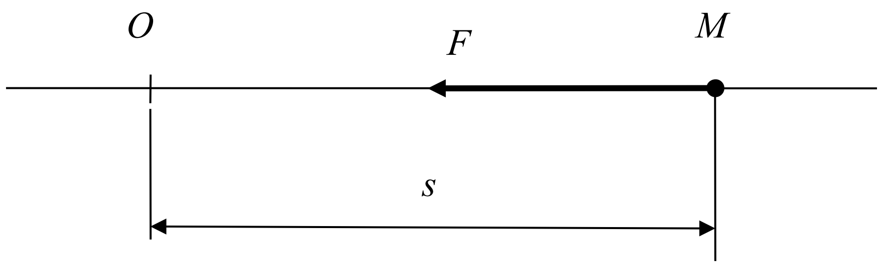
$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}, \; tg\varphi = -\frac{V_0}{\omega x_0} \qquad (3)$$

Функції виду (2) називаються простими гармоніками (чи просто-гармоніками). В силу властивості 1 проста гармоніка має період $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Параметр A називається амплітудою гармоніки, ω – частотою гармоніки, φ – початковою фазою гармоніки [1, с.8].

Задача про гармонійні коливання. Походження найменувань «амплітуда», «частота», «початкова фаза» пов'язане з наступною задачею механіки про найпростіший коливний рух – гармонічні коливання.

Нехай матеріальна точка M з масою m рухається по прямій під дією сили F, пропорційної відстані s точки M від фіксованої точки O і направленої до O (мал. 1)



Мал. 1

Зазвичай, будемо вважати, що $s < 0$ зліва від O, $s > 0$ праворуч від O, тобто задамо на прямій звичайний додатний напрямок, і знаходимо $F=-ks$, де k – коефіцієнт пропорційності, $k > 0$. Звідси слідує,

$$m = \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks,$$

або

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0,$$

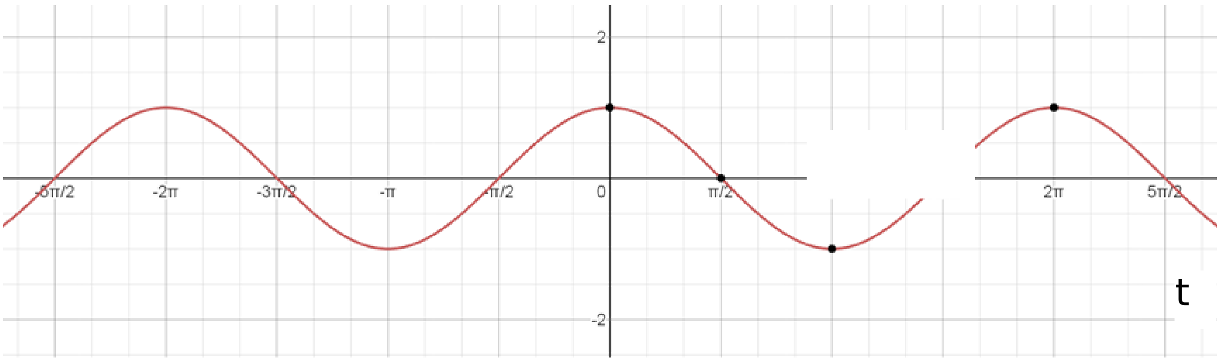
де покладено $\omega^2 = \frac{k}{m}$, звідки $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Розв’язком цього диференціального рівняння буде функція $s = A\cos(\omega t + \varphi)$, де A і φ – сталі, які можна знайти, знаючи положення і швидкість точки M в початковий момент, тобто в момент $t = 0$. Ми отримали гармоніку. Таким чином, s є періодичною функцією часу t з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Це означає,що під дією вказаної сили F точка M буде здійснювати коливні рухи.

Амплітуда A є максимальним відхиленням точки M від O. Величина $\frac{1}{T}$ – це кількість коливань за одиницю часу. Тому $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – це кількість коливань за проміжок часу довжиною 2π одиниці (наприклад, секунд) [2, с. 13]. Звідси назва «частота». Величина φ – початкова фаза – характеризує положення точки M в початковий момент, так як при $t = 0$ маємо: $s_0 = \cos\varphi$.

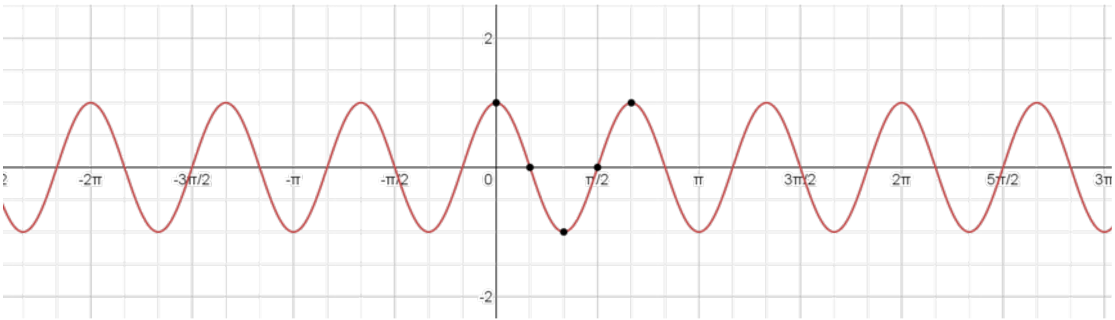
Графіки гармонічних функцій. Для гармоніки $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ будемо вважати $\omega > 0$, так як в протилежному випадку, враховуючи періодичність даної функції, ми могли б опустити знак мінус. В найпростішому випадку – при $A = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$ – отримуємо функцію $y = \cos t$, тобто звичайну косинусоїду (мал. 2)



Мал. 2

При $A = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ – отримаємо синусоїду, графік якої перенесений на $\frac{3\pi}{2}$ вліво від графіка косинусоїди $y = \cos t$.

Розглянемо гармоніку $y = \cos \omega x$ і покладемо $\omega t = z$. Отримаємо $y = \cos z$. Ми прийшли до звичайної косинусоїди. Так як, $t = \frac{z}{\omega}$, то звідси випливає,що графік гармоніки $y = \cos \omega t$ можна отримати з графіка звичайної

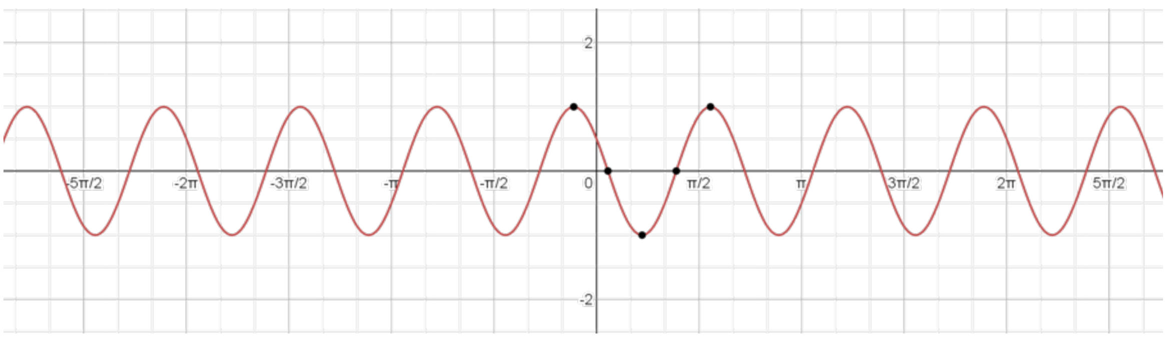


косинусоїди за допомогою деформації останнього в напрямку осі абсцис. При $\omega > 1$ деформація зводиться до рівномірного стиснення в ω раз, при $\omega < 0$ – до розтягнення в $\frac{1}{\omega}$ раз. На мал. 3 Зображена гармоніка $x(t) = \cos 3t$ з періодом $T = \frac{2\pi}{3}$

Мал. 3

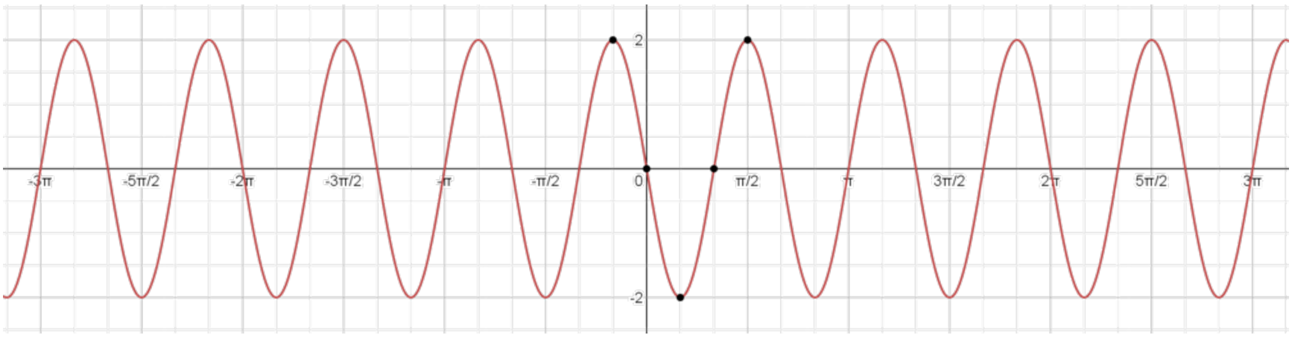
Розглянемо тепер гармоніку $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ і покладемо $\omega t + \varphi = \omega z$.

Графік гармоніки $y = cos\ \omega t$ нам вже відомий. Але $t = z - \frac{\varphi}{\omega}$. Звідси слідує, що графік гармоніки $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ можна отримати із графіка гармоніки $y = cos\ \omega t$ зсувом на $-\frac{\varphi}{\omega}$ вздовж вісі абсцис. На мал. 4 Зображена гармоніка $x(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ з періодом $T = \frac{2\pi}{3}$ і початковою фазою $\varphi = \frac{\pi}{3}$.



Мал. 4

Нарешті, графік гармоніки $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ дістанемо із графіка гармоніки $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ помноживши всі ординати на число *A*. На мал. 5 зображена гармоніка $x(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$.



Мал. 5

Отже, підсумовуючи все вище сказане, можемо зробити такий висновок: графік будь-якої гармоніки $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ можна отримати із графіка звичайної косинусоїди рівномірним стисненням (чи розтягненням) в напрямку осей координаті зсувом вздовж осі Ox.

Додавання гармонік з однаковими частотами. В багатьох прикладах доводиться часто розглядати функції, які є сумами гармонік. Позитивним моментом є те, що при додаванні гармонік з однаковими частотами отримуємо гармоніку з тією ж частотою.

Дійсно, нехай $x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. Розглянемо функцію $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Так як функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ задовольняють рівняння (1), то враховуючи лінійність і однорідність цього рівняння функція $x(t)$ теж розв'язок рівняння (1), але будь-який розв'язок може мати вигляд (2), а це і означає, що сума гармонік – гармоніка з тією ж частотою.

Для знаходження амплітуди і фази сумарної гармоніки існує декілька методів. Розглянемо їх.

1. А н а л і т и ч н и й м е т о д .

Так як

$x_1(0) = A_1\cos\varphi_1$, $\qquad x_2(0) = A_2\cos\varphi_2$,

$x_1'(0) = -A_1\omega\sin\varphi_1$, $\qquad x_2'(0) = -A_2\omega\sin\varphi_2$, то

$x(0) = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$, $\qquad x'(0) = -(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\omega$,

тому в силу формул (3)

$$A = \sqrt{(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2 + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Недоліком арифметичного методу є те, що він не дуже зручний при додаванні великої кількості гармонік.

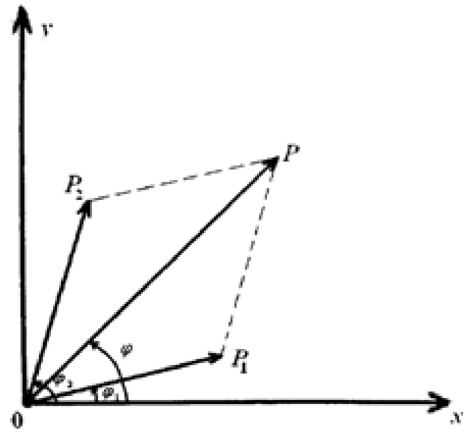
Більш поширеним методом при розв'язуванні прикладів є графічний.

Розглянемо графічні методи.

2. Графічні методи.

Кожну гармоніку будемо зображати у вигляді вектора, який обертається навколо початку координат з кутовою швидкістю ω. Довжина такого вектора нехай дорівнює амплітуді гармоніки.

На мал. 6 вектор $\overrightarrow{OP_1}$ зображає гармоніку $x_1(t)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ – гармоніку $x_2(t)$.



Мал. 6

Розглянемо вектор $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$, цей вектор також буде обертатись навколо початку координат з кутовою швидкістю ω, а так як проекції векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ на вісь Ox в будь-який момент часу дають значення гармонік $x_1(t)$ і $x_2(t)$, то і проекція вектора $\overrightarrow{OP}$ на вісь Ox – це значення гармоніки $x_1(t) + x_2(t)$, тобто сума гармонік. З цього випливає такий спосіб отримання амплітуди і фази результуючої гармоніки:

Будуємо систему координат і вектори $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$, довжини яких дорівнюють амплітудам гармонік $x_1(t)$ і $x_2(t)$, а кути які утворюють вектори $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ з віссю Ox, відповідно дорівнюють фазам гармонік.

Знаходимо суму векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$, отримаємо вектор $\overrightarrow{OP}$, тоді довжина цього вектора буде дорівнювати амплітуді гармоніки $x_1(t)+x_2(t)$, а кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OP}$ з віссю Ox, дорівнює фазі гармоніки $x_1(t)+x_2(t)$ [6, с. 27].

Комплексні гармоніки. Поряд з гармонікою $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ зручно розглядати і комплексну функцію

$$z(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi)}=Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}=\widetilde{A}e^{i\omega t}$$

Така функція називається комплексною гармонікою, що відповідає гармоніці $x(t)$. Так як $x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)$, то кожній гармоніці можна однозначно поставити у відповідність комплексну гармоніку і, навпаки, комплексній гармоніці завжди легко відновити дійсну гармоніку. Тому в прикладах їх часто ототожнюють, а працюють з комплексними гармоніками. Комплексне число $\widetilde{A}$ називають комплексною амплітудою гармоніки $x(t)$. Із сказаного випливає ще один метод додавання гармонік: нехай треба додати гармоніки $x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ і $x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$.

Додамо відповідні комплексні гармоніки $z_1(t)=\widetilde{A}_1e^{i\omega t}$ і $z_2(t)=\widetilde{A}_2e^{i\omega t}$, тоді отримаємо $z(t)=(\widetilde{A}_1+\widetilde{A}_2)e^{i\omega t}$. Звідси $x_1(t)+x_2(t)=\mathrm{Re}\,z$ [1, с. 12].

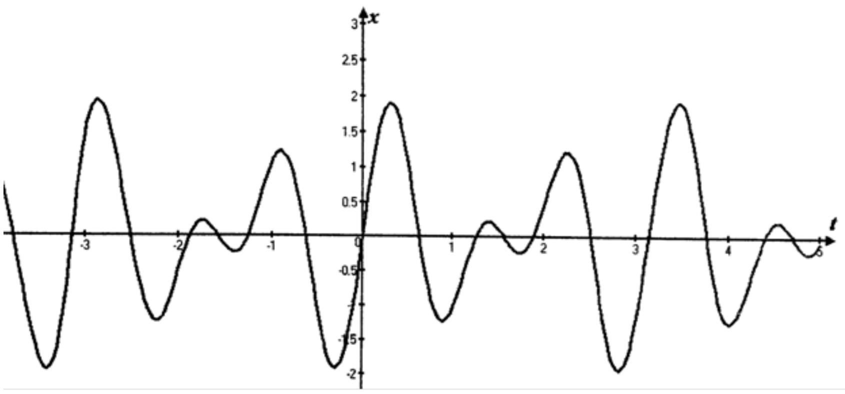
Так як комплексні числа можна зображати векторами, то, взагалі кажучи, розглянутий метод додавання гармонік рівносильний методу векторів, що обертаються.

Додавання гармонік з різними частотами, биття. При додаванні гармонік з різними частотами отримаємо більш складні функції, ніж гармоніки. Для прикладів особливо цікавим є випадок, коли частоти гармонік, що додаються, відносно великі, а їх різниця – мала. Розглянемо приклад:

$$x(t) = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t = 2\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t.$$

Явище, що описує ця функція, можна розглядати так: відбувається коливання з частотою $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, але «амплітуда» цього коливання змінюється і подається виразом $2\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ [7, с. 36] період зміни амплітуди більш довготривалий, ніж період коливань. Див. мал. 7 коливання амплітуди називається биттям.

В радіотехніці ω_1 і ω_2 електромагнітних коливань в багато разів перевищують частоти звукових коливань, між тим різниця $\omega_1 - \omega_2$ попадає в область звукових частот.



Мал. 7

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Введення поняття гармоніки проілюстровано на конкретній прикладній задачі з фізики. Наведено основні методи додавання гармонік як з однаковими, так і з різними частотами. Обгрунтовано аналітичний та графічний методи, що найчастіше використовуються при розв’язувані такого типу задач.

Список використаної літератури

1. Волков Ю.И. Гармонический анализ. – Винница: Министерство высшего и среднего специального образования УССР, 1977. – 56 с.
2. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир С.М. Тригонометрия. Задачник к школьному курсу. – М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1988
3. Слепкань З.И. Методика преподавания алгебры и начал анализа. – К.: Рад. шк., 1978

4. Смирнов В.И. Курс высшей математики У 2 ч. Ч. 2. – М.: Наука, 1968, 453 с.

5. Соболев С.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1963, 352 с.

6. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – 3-е изд. – М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 384 с.

7. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. – 3-тє вид., переробл. і допов. – К.: Вища школа, 2005. –510 с.