УДК 372.8:512.62

ЗАДАЧІ АЛГЕБРИ МНОГОЧЛЕНІВ У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Матвієнко Тетяна

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті наведено приклади розв'язування алгебраїчних задач із розділу «Многочлени»; розглянуто задачі підвищеного та поглибленого рівнів шкільного курсу алгебри, у яких розкриваються різні аспекти завдань алгебри многочленів; відмічено позитивний вплив застосовуваних способів розв'язання задач на підвищення освітнього рівня школярів.

Ключові слова: *многочлен, корені многочлена, теорема Вієта, схема Горнера, конкурсні задачі шкільного курсу математики.*

Problems of polynomial algebra in a higher profile school

Tetiana Matviienko

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor Iziumchenko L.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article provides examples of solving algebraic problems of the course "Polynomials"; the problems of elevated and advanced levels of the school course of algebra are considered, which reveal different aspects of the problems of polynomial algebra; the positive impact of the methods of solving the problems on raising the educational level of students was noted.

Keywords: *polynomial, polynomial roots, Vieta theorem, Horner's method, competitive problems of school mathematics course.*

Постановка проблеми. Одним з найважливіших завдань школи є підготовка учнів до життя, набуття ними умінь та навичок, а це можливо лише тоді, коли учні залучені до спільної діяльності в процесі пізнавального пошуку, особливо це стосується профільних шкіл, адже профіль досить часто визначає майбутню професію особи. На сучасному етапі розвитку математичної освіти стає особливо актуальним питання про зміст завдань. Від підбору системи вправ і задач залежить ступінь свідомого засвоєння учнями предмета, розвитку самостійності та інтересу школярів до математики.

Особливої актуальності набуває орієнтація на навчання способів пізнання у процесі інтенсивної математичної підготовки обдарованих учнів у системі МАН України, при організації занять з учасниками математичних олімпіад, з учнями заочних математичних шкіл при вищих навчальних закладах України [1].

Багато прикладів і задач з використанням многочленів зустрічаються щороку на міських, обласних та міжнародних олімпіадах, і, як видно з практичного досвіду, учні не мають навичок роботи з многочленами в нестандартних умовах, а тому є потреба дослідити методику ефективного формування умінь та навичок роботи з многочленами та їх застосування.

Аналіз досліджень і публікацій. Питання, пов’язані із вивченням алгебри многочленів і їх застосуваннями у шкільному курсі математики, розглядали Л. Ізюмченко, О. Макарчук, В. Нічишина, Р. Ріжняк, З. Халецька та ін., питання активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення многочленів досліджували М. Бурда, В. Забранський, О. Істер, Є. Нелін, З. Слєпкань, Н. Тарасенкова, В. Швець та ін., конкурсні завдання теорії многочленів розглядали О. Вороний, В. Вишенський, І. Мітельман, О. Панасенко, В. Плахотник, В. Ясінський та ін., проблеми впровадження профільного навчання в Україні досліджували І. Акуленко, Г. Бевз, Н. Бібік, С. Іванова, Ю. Мальований, С. Максименко, В. Малишев, О. Носова, О. Панішева, П. Сікорський, О. Чашечникова та ін. [1, 2, 3].

Мета статты:. Проаналізувати задачі із розділу «Многочлени» курсу алгебри основної і старшої школи; висвітлити методичні аспекти розв’язування таких задач та проілюструвати їх прикладами завдань поглибленого рівня; навести приклади завдань для самостійної і контрольної робіт для учнів десятого класу при профільному (поглибленому) вивченні математики.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Зауважимо, що одним із основних завдань теорії многочленів у шкільному курсі математики є готовність учнів до розв’язання рівнянь вищих степенів, тобто до відшукання раціональних (чи дійсних) коренів многочленів. У нашій статті ми б хотіли навести приклади деяких нестандартних прийомів при розв’язуванні таких рівнянь.

Проілюструємо це на прикладі наступного рівняння третього степеня.

Задача 1. Знайдіть (дійсні) корені рівняння $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння раціональних коренів не має, оскільки дільники вільного члена ± 1 не є коренями, а інших дільників вільний член не має.

Перший спосіб. Виділимо повний куб, для чого додамо і віднімемо $6x$, маємо $(x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 6x) - 6x = 0$; додамо і віднімемо 6: $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 6x + 6 - 6 = 0$, звідки $(x-1)^3 - 6(x-1) - 6 = 0$, замінимо $x - 1 = y$, маємо рівняння $y^3 + py + q = 0$, для розв'язання якого застосовуємо формулу Кардано. Але цей універсальний спосіб – спосіб Кардано – не вивчається у школі.

Другий спосіб. Перепишемо рівняння у вигляді $x^3 = 3x^2 + 3x + 1$, виділимо повний куб у правій частині рівності, для чого до обох частин рівняння додамо x^3, отримаємо: $2x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $2x^3 = (x+1)^3$ та $(\sqrt[3]{2} \cdot x)^3 = (x+1)^3$, звідки $\sqrt[3]{2} \cdot x = x + 1$. Це рівняння відносно змінної x є лінійним: $x \cdot (\sqrt[3]{2} - 1) = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ (позбулися ірраціональності у знаменнику).

Відповідь: $x_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$.

Наведемо приклад задачі, яка пропонувалася учням десятого класу на Всеукраїнському етапі конкурсу-захисту робіт у МАН, по формулюванню ця задача є оберненою до попередньої задачі.

Задача 2. Знайдіть многочлен з цілими коефіцієнтами, коренем якого є:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$.

*Розв'язання***.** а) Покладемо $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, піднесемо до квадрату, отримаємо $x^2 = 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 5$, звідки $x^2 - 7 = 2\sqrt{10}$. Піднесемо до квадрату, отримаємо $x^4 - 14x^2 + 49 = 40$, звідки $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$. Шуканий многочлен $f(x) = x^4 - 14x^2 + 9$.

б) Покладемо $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$, локалізуємо кубічний корінь, отримаємо: $x - \sqrt{5} = \sqrt[3]{2}$, піднесемо до кубу, матимемо: $x^3 - 3x^2\sqrt{5} + 3x \cdot 5 - 5\sqrt{5} = 2$. Локалізуємо квадратні корені у правій частині: $x^3 + 15x - 2 = 3x^2\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$, піднесемо до квадрату, отримаємо:

$$x^6+225x^2+4+30x^4-4x^3-60x=45x^4+150x^2+125.$$

Перенесемо все в один бік і зведемо подібні, матимемо: $x^6-15x^4-4x^3+75x^2-60x-121=0$. А тому шуканий многочлен $f(x)=x^6-15x^4-4x^3+75x^2-60x-121$.

в) Покладемо $x=\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$, локалізуємо корінь четвертого степеня $x-\sqrt{2}=\sqrt[4]{2}$, піднесемо до квадрату, отримаємо $x^2-2x\sqrt{2}+2=\sqrt{2}$, звідки $x^2+2=2x\sqrt{2}+\sqrt{2}$. Піднесемо до квадрату, отримаємо $x^4+4x^2+4=8x^2+8x+2$. Перенесемо все в один бік і зведемо подібні, матимемо: $x^4-4x^2-8x+2=0$. Шуканий многочлен $f(x)=x^4-4x^2-8x+2$.

Відповідь: а) $f(x)=x^4-14x^2+9$; б) $f(x)=x^6-15x^4-4x^3+75x^2-60x-121$; в) $f(x)=x^4-4x^2-8x+2$.

Частими задачами теорії многочленів є задачі на використання теореми Вієта чи теореми, оберненої до теореми Вієта, наприклад:

Задача 3. Використовуючи теорему Вієта, знайдіть усі значення параметра λ такі, щоб один з коренів рівняння $4x^3-567x+\lambda=0$ дорівнював подвоєному іншому кореню. У відповіді укажіть значення параметра λ та корені рівняння $f(x)=0$. Виконайте перевірку відповіді за схемою Горнера.

Розв'язання. За теоремою Вієта для многочлена третього степеня маємо співвідношення $x_1+x_2+x_3=-0/4$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-567/4$; $x_1x_2x_3=-\lambda/4$. Враховуючи, що $x_2=2x_1$, отримаємо з першої рівності $x_3=-3x_1$. Друга і третя рівності перепишуться $2x_1^2-3x_1^2-6x_1^2=-567/4$; $-6x_1^3=-\lambda/4$, звідки маємо $7x_1^2=567/4$; $\lambda=24x_1^3$. Перше співвідношення $x_1^2=81/4$ дає дві можливості:

1) $x_1=9/2$, звідки $x_2=2x_1=9$, $x_3=-3x_1=-27/2$, тоді $\lambda=24x_1^3$, $\lambda=24\cdot(9/2)^3=3\cdot729=2187$;

2) $x_1=-9/2$, а тоді $x_2=2x_1=-9$, $x_3=-3x_1=27/2$, $\lambda=24x_1^3$,

$\lambda = 24 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)^3 = -3 \cdot 729 = -2187$.

Підставимо отримані значення параметра λ в початкову умову та виконаємо перевірку за схемою Горнера:

	4	0	–567	2187
$\frac{9}{2}$	4	18	–486	**0**
9	4	54	**0**	
$-\frac{27}{2}$	4	**0**		

	4	0	–567	–2187
$-\frac{9}{2}$	4	–18	–486	**0**
–9	4	–54	**0**	
$\frac{27}{2}$	4	**0**		

Відповідь: $\lambda_1 = -2187$, $x_1 = -9$, $x_2 = -\frac{9}{2}$, $x_3 = \frac{27}{2}$;

$\lambda_2 = 2187$, $x_1 = -\frac{27}{2}$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 9$.

Задача 4. Ребра прямокутного паралелепіпеда є коренями многочлена $f(x) = x^3 - 20x^2 + 125x - 244$. Використовуючи теорему Вієта, обчисліть об’єм паралелепіпеда, площу його поверхні та діагональ паралелепіпеда. Виконайте *перевірку*, обґрунтувавши, що усі корені многочлена задовольняють геометричну складову задачі (тобто є додатними).

Розв’язання. За теоремою Вієта для многочлена третього степеня маємо співвідношення $x_1 + x_2 + x_3 = 20$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 125$; $x_1x_2x_3 = 244$. Враховуючи, що об’єм прямокутного паралелепіпеда $V = x_1x_2x_3$, отримаємо з останньої рівності $V = 244$ од^3.

Оскільки площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда $S = 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, то з урахуванням другої рівності отримаємо $S = 2 \cdot 125 = 250$ од^2. Так як діагональ прямокутного паралелепіпеда $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, то піднесемо першу рівність до квадрату $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 400$, виразимо суму квадратів $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 400 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ та врахуємо другу рівність, отримаємо, що $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 400 - 2 \cdot 125 = 150$, а тоді $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ од.

Перевірка: раціональні корені многочлена $f(x) = x^3 - 20x^2 + 125x - 244$ **слід шукати серед дільників вільного члена:** $244 = 2^2 \cdot 61;\ \tau(244) = 3 \cdot 2 = 6$,

$D(244)=\{\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 61;\pm 122;\pm 244\}$**. Обчислюємо** $f(1); f(-1)$ **і перевіряємо виконання двох умов:** $f(1)$ **ділиться на** $(c-1)$**,** $f(-1)$ **ділиться на** $(c+1)$**:**

	1	–20	125	–244
1	1	–19	106	**–138**

	1	–20	125	–244
–1	1	–21	146	**–390**

c	–2	2	–4	4	–61	61	–122	122	–244	244
$c+1$	–1	3	–3	5	–60	62	–121	123	–243	245
$\frac{-390}{c+1}\in Z-?$	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–
$c-1$	–3	1	–5	3						
$\frac{-138}{c-1}\in Z-?$	+	+	–	+						

Потенційні корені –2; 2; 4. Перевіряємо їх за схемою Горнера:

	1	–20	125	–244	
–2	1	–22	169	**–582**$\neq 0$	
2	1	–18	89	**–66**$\neq 0$	
4	1	–16	61	**0**	$x_1=4$

Коефіцієнти частки – в останньому рядку, тобто $f(x)=(x-4)(x^2-16x+61)$. Розв'язавши останнє рівняння $x^2-16x+61=0$, отримаємо корені $x_2=8-\sqrt{3}$, $x_3=8+\sqrt{3}$ (усі три корені початкового рівняння є додатними, тобто можуть бути сторонами прямокутного паралелепіпеда).

Відповідь: $V=244$ од^3, $S=250$ од^2, $d=5\sqrt{6}$ од; корені многочлена $x_1=4$, $x_2=8-\sqrt{3}$, $x_3=8+\sqrt{3}$ є додатними.

Крім задач на відшукання коренів многочлена та застосування теореми Вієта достатньо часто фігурують задачі на доведення, наприклад:

Задача 5. Доведіть, що многочлен $f(x)=(x-1)^7+x^7-2x+1$ ділиться на многочлен $g(x)=2x^3-3x^2+x$.

Доведення. Оскільки $g(x)=2x^3-3x^2+x=x(x-1)(2x-1)$, то достатньо показати, що $f(x)$ ділиться на $g_1(x)=x$, $g_2(x)=x-1$ і $g_3(x)=2x-1$, тобто остачі від ділення мають дорівнювати нулю:

$f(0)=(-1)^7+1=0$, $f(x)\,\vdots\,x$;

$f(1)=1^7-2\cdot 1+1=0$, $f(x)\,\vdots\,(x-1)$.

$f(0{,}5)=-0{,}5^7+0{,}5^7-2\cdot 0{,}5+1=0$, $f(x)\,\vdots\,(2x-1)$.

Наведемо приклад тексту *самостійної* роботи для учнів 10 класу (профільне вивчення математики) з розділу «Многочлени»:

1. Перемножте многочлени $f(x)=3x^2+x-3$ і $h(x)=2x^2-3x+1$.

2. Поділіть з остачею $f(x)=2x^4+3x^3-10x^2+8x-4$ на $g(x)=x^2+3x-1$. У відповіді укажіть частку і остачу.

3. Використовуючи схему Горнера, поділіть многочлен $f(x)=3x^4-11x^3+5x^2-3x-7$ на двочлен (x+1). У відповіді укажіть частку і остачу.

4. Обчисліть значення многочлена $f(x)=3x^4-11x^3+5x^2-3x-7$ при x=1.

5. Обчисліть значення параметрів a і b, якщо многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ при діленні на x–1 дає остачу 1, а при діленні на двочлен x+2 остачу (–26).

6. Розв'яжіть рівняння: а) $x^3+5x^2-17x-21=0$; б) $5x^3-4x^2-11x-2=0$.

Наведемо приклад тексту *контрольної* роботи для учнів 10 класу (профільне вивчення математики) з розділу «Многочлени»:

1. За схемою Горнера знайдіть значення многочлена $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-x+3$ при $x=2$ та $x=-1$.

2. За схемою Горнера знайдіть частку і остачу від ділення многочлена $f(x)=x^4+2x^3-x+3$ на двочлен $x-1$.

3. Знайдіть частку і остачу від ділення многочлена $f(x)=x^4-6x^3-x^2+3x-1$ на многочлен $g(x)=x^2-3x$.

4. Встановіть кратність кореня $x=-1$ многочлена $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$.

5. Знайдіть усі корені многочлена $f(x)=x^5-x^4-3x^3+3x^2+2x-2$.

6. Використовуючи метод інтервалів, розв'яжіть нерівність

$$(x+3)(x-1)(x-2)^2(x-5)\geq 0.$$

7. Відомо, що многочлен $f(x)$ при діленні на двочлен $x+2$ дає остачу (–3), а при діленні на двочлен $x-3$ дає остачу 22. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на (x^2-x-6).

8*. Використовуючи метод математичної індукції, доведіть, що при будь-якому натуральному *n* має місце твердження: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Відмітимо, що розв'язування таких задач у старшій профільній школі оправдане перш за все тим, що сприяє досягненню однієї з найважливіших цілей викладання математики в школі – розвитку абстрактного мислення, творчих здібностей учнів, підвищенню рівня їх логічного, а отже, й загального розвитку.

Наведені приклади – це частина задач із шкільного курсу математики і вчитель зможе внести корективи у викладений матеріал в залежності від підготовки учнів, їх здібностей і інтересів. Розглянутий матеріал корисно використати для підготовки учнів до участі у математичних змаганнях, конкурсах, олімпіадах та позакласній роботі.

Список використаної літератури

1. Ізюмченко Л.В., Ріжняк Р.Я. Використання елементів системно-діяльнісного навчання у процесі інтенсивної математичної підготовки обдарованих учнів //Наукові записки. – Випуск 68. – Серія: Математичні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. – С. 78–85.
2. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. – Харків: Вид-во «Ранок», 2018. – 272 с.
3. Халецька З.П. Вивчення алгебри многочленів із застосуванням комп'ютерних засобів / З.П. Халецька, Л.В. Ізюмченко. //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 4. – Кривий Ріг: Видавн. центр НметАУ, 2004. – т. 1. – С. 286–290.