УДК: 37.016.91:51

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ДО ЗНО ЗА ДОПОМОГОЮ ADVANCED GRAPHER ТА MAPLE

Мамренко Анастасія

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних, доктор педагогічних наук, професор кафедри математики

Кушнір В.А.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті проілюстровано застосування ІКТ при підготовці до ЗНО для розв'язування завдань з параметрами. Наведені приклади розв'язування задач з параметрами за допомогою Advanced Grapher та Maple. Використання даних середовищ дає можливість учням краще зрозуміти способи розв'язку задач з параметрами, створювати алгоритми розв'язку. Поєднання математики й аналітичних і графічних можливостей Maple-технології сприяє й спонукає до формування в учнів інтегративних знань, умінь, компетентності з математики й інформатики, а сам процес розв'язання рівнянь і нерівностей з параметрами набуває пошуково-дослідницького характеру. Дані технології краще використовувати на факультативних заняттях з учнями або при роботі математичного гуртка. Кожна задача з параметрами вимагає свого окремого способу й алгоритму розв'язування і тому вимагає продуктивного учіння, що не вписується в стандартні способи й алгоритми. Стаття присвячена розв'язуванню наведених проблем.

Ключові слова: *завдання з параметрами, область допустимих значень, ІКТ, зовнішнє незалежне оцінювання, програмне забезпечення, технологія, алгоритм, Advanced Grapher, Maple.*

Solving parameter tasks in preparation to external independent evaluation with Advanced Grapher and Maple

A. Mamrenko

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Mathematics

Kushnir V.A

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article illustrates the use of ICT in preparing for the EIA to solve parameter problems. Here are some examples of how to solve problems with parameters using Advanced Grapher and Maple. Using these environments enables students will understand ways how to solve problems with parameters, and to create algorithms for solving them. The combination of mathematics and the analytical and graphical capabilities of Maple technology contributes to and encourages students to develop integrative knowledge, skills, competencies in mathematics and computer science, and the process of solving equations and inequalities with parameters becomes exploratory. These technologies are better to use in elective classes with students or working in a math circle. Each parameter task requires its own method and algorithm and therefore requires productive learning that does not fit into standard methods and algorithms. The article addresses these issues.

Key words: *parameter tasks, validity range, ICT, external independent evaluation, software, technology, algorithm, Advanced Grapher, Maple.*

Постановка проблеми. Зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) – це словосполучення відоме у кожній родині де є діти шкільного віку.

Однією із цілей ЗНО являється поєднання підсумкової атестації учнів і вступних іспитів у вищі навчальні заклади. Ще однією метою ЗНО є спроба поліпшити якість освіти за рахунок більш високої мотивації на успішне його проходження.

Завдання з параметрами - проблема для більшості випускників на ЗНО. Але задачі з параметрам сприяють розвитку логічного мислення, підвищують математичну культуру школярів. І часто зміст математичної задачі з параметрами не виходить за межі шкільної програми, але учні не готові розв'язувати такі завдання без попередньої підготовки. Досвід показує, що починати знайомство з параметрами треба як раніше, і частіше повертатися до таких задач протягом усіх років навчання у школі. Про параметри написано багато чудових книжок, але мені хочеться запропонувати вам розв’язання проблеми з точки зору учителя.

Аналіз досліджень і публікацій. Комп’ютеризація та впровадження сучасних інформаційних технологій потребують математичної грамотності людини на кожному робочому місті. Це передбачає конкретні математичні знання і певний стиль мислення. Освітлення окремих, але мало розроблених розділів шкільного курсу математики складає цінний внесок в методичну науку, тому що кожний такий розділ дихає науковою свіжістю і будить творчу думку математика.

Статистика результатів ЗНО декількох минулих років показує, що саме задачі з параметрами рідше всього виступають задачами, в яких випускники пробують свої сили, виражають свою математичну підготовку.

В чому причина непопулярності таких задач?

Не секрет, що задачі з параметрами хоч і використовують доступні будь-якому учню теоретичні знання, але практично мало розв’язуються у шкільному курсі математики, а тим більше далеко не завжди виносяться на розгляд при підготовці до підсумкової атестації.

Ще однією причиною, на погляд більшості експертів ЗНО, є те, що учителі самі не готові розв’язувати такі задачі, отже, неготові і навчати цьому учнів. Проте задачі з параметрами зустрічаються майже в усіх варіантах ЗНО, а саме у частині Б. І лише 2–3% учнів розв’язують їх вірно, тому придбання знань та навичок розв’язування складних, нестандартних завдань, в тому числі і задач з параметрами, учням шкіл і на сьогодні залишається актуальним.

Мета статті – створення методики розв’язування рівнянь і нерівностей з використанням можливостей Advanced Grapher та Maple.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Якщо в рівнянні або нерівності деякі коефіцієнти задані не конкретними числовими значеннями, а подані буквами, то вони називаються параметрами, а рівняння чи нерівність параметричними.

Розв’язати рівняння або нерівність з параметром – означає для всіх допустимих значень параметра знайти множину всіх розв’язків цього рівняння або нерівності. Причому, суттєвим етапом розв’язку завдань з параметром є запис відповіді. Особливо це відноситься до тих задач, в котрих можливі різні варіанти відповідей у залежності від значення параметру.

Традиційно для розв’язування задач з параметрами використовують аналітичні та графічні методи. Найбільш часто використовуються аналітичні способи міркування до розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем або сукупностей. Гарні результати в окремих випадках дає використання властивостей функцій. Графічні розв'язання, як правило, використовуються в Декартовій системі координат [1, 2].

Важливо навчити учнів різним методам розв'язувати задачі, а не віддавати перевагу якомусь одному із них, з тим щоб кожний учень був готовий до вибору раціонального і ефективного шляху розв'язку. Велику увагу слід приділяти накопиченню в учнів досвіду самостійного пошуку способу і відповідного алгоритму. У наш час допомогти у вивченні даного питання може комп'ютер, а саме розв'язок параметричних рівнянь та нерівностей з використанням Advanced Grapher. Це допомагає учням навчитися уявляти розв'язок даних завдань та прораховувати кроки їх розв'язання.

Розглянемо декілька прикладів із ЗНО минулих років різними способами їх розв'язку.

Задача 1.(ЗНО 2011 р. завдання 35). Знайдіть найменше значення *a*, при

якому має розв'язки рівняння .

Розв'язання

Розглянемо даний приклад використовуючи Advanced Grapher, але спочатку виконаємо деякі перетворення.

$\sin 30^\circ \sin x + \cos 30^\circ \cos x = 6 - 5a - 2a^2$;

$\cos(30^\circ - x) = 6 - 5a - 2a^2$.

Оскільки функція косинуса обмежена то рівняння має розвязок лише при умові:

$$|6 - 5a - 2a^2| \le 1, \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5a - 2a^2 \ge -1, \\ 6 - 5a - 2a^2 \le 1, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 5a - 7 \le 0, \\ 2a^2 + 5a - 5 \ge 0. \end{cases}$$

За допомогою Advanced Grapher побудуємо розв'язок даної системи рис. 1.

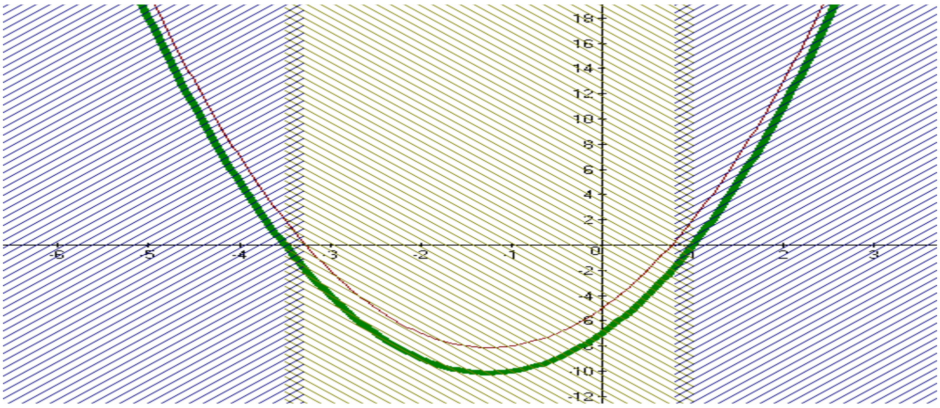

Рис. 1. Графічний розв'язок ЗНО 2011 р. завдання 35

Зеленою лінією зображено розв'язок першої нерівності а червоною другої. По графіку зрозуміло що потрібні нам проміжки між цими двома лініями. Оскільки нам потрібне найменше значення параметра *a* наведемо наш курсор на точку перетину вісі з зеленою лінією і одержимо значення -3,5. Це і буде розв'язком даного завдання.

Відповідь: -3,5.

<u>Задача 2.</u> (ЗНО 2012 р. завдання 32). При якому найменшому значенні параметра *a* рівняння $\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25}\right)=a\sqrt{2x+15}$ має лише два різних корені?

<u>Розв'язання</u>

Проаналізуємо, яких значень можуть набувати параметр та змінна. Очевидно, що параметр може набувати довільного дійсного значення. Область допустимих значень змінної:

$2x + 15 \geq 0; \leftrightarrow \; x \geq -7{,}5.$

Повернемось до рівняння:

$\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{(x+9)^2}-\sqrt{(x-5)^2}\right)=a\sqrt{2x+15}$;

$\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{(x+9)^2}-\sqrt{(x-5)^2}-a\right)=0$;

$\sqrt{2x+15}\cdot(|x+9|-|x-5|-a)=0$.

$$\begin{cases}\sqrt{2x+15}=0,\\ |x+9|-|x-5|-a=0,\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}2x+15=0,\\ |x+9|-|x-5|=a,\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x=-7{,}5,\\ |x+9|=|x-5|+a.\end{cases}$$

Бачимо, що $x = -7{,}5$ – корінь заданого в умові рівняння.

Розглянемо друге рівняння одержаної сукупності. Знайдемо найменше ціле a, при якому це рівняння має лише один корінь, і він відмінний від -7,5.

Зобразимо за допомогою Advanced Grapher рис.2 в прямокутній системі координат графіки функцій $y = |x + 9|, y = |x - 5|$.

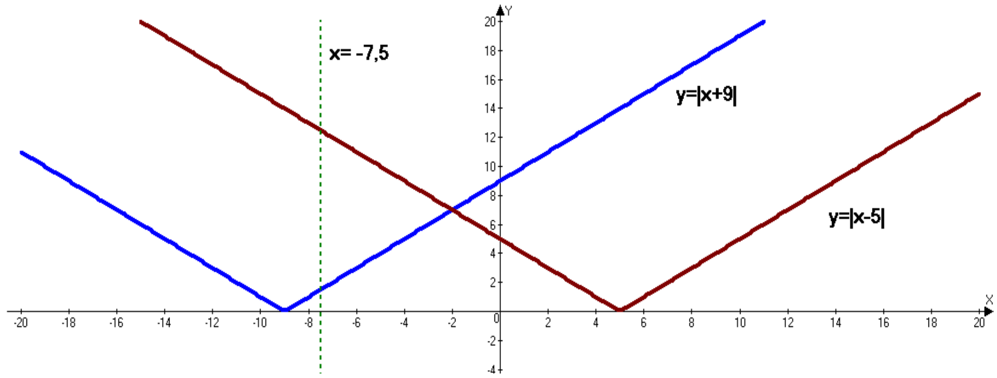

Рис. 2. Графічний розв'язок ЗНО 2012 р. завдання 32

Графік функції $y = |x - 5| + a$ одержуємо з графіка функції $y = |x - 5|$ зміщенням його вздовж осі Oy на a одиниць.

Абсциса точки перетину графіків функцій $y = |x + 9|, y = |x - 5| + a$ є коренем рівняння $|x + 9| = |x - 5| + a$.

При $x = -7,5$:

$|-7,5 + 9| = |1,5| = 1,5$;

$|-7,5 - 5| = |-12,5| = 12,5$.

Точка перетину графіків функцій $y = |x + 9|, y = |x - 5| + a$ з найменшою ординатою: (-7,5;1,5). Тоді:

$a = -(12,5 - 1,5) = -11, x = -7,5.$

Але, оскільки умову задачі задовольняє другий корінь, відмінний від -7,5 , то найменшим цілим , при якому буде одна точка перетину графіків функцій $y = |x + 9|, y = |x - 5| + a$ є число -10.

Отже, найменшим цілим а, при якому вихідне рівняння має лише два різні корені, є число -10.

Відповідь: −10.

Таким чином ми побачили як за допомогою Advanced Grapher можна розв'язувати завдання з параметрами під час підготовки до ЗНО. Це дає можливість учням наглядно побачити розв'язки та краще зрозуміти свої наступні кроки при виконані таких завдань. Як що ж діти вміють виконувати такі завдання, або вже розглянули приклади такого обчислення то їм можна запропонувати виконання завдань з параметрами за допомогою Maple. Розглянемо декілька таких прикладів використовуючи дане середовище програмування.

Завдання 3. Визначити кількість цілих значень параметра *a*, при яких рівняння має розв'язки.

Розв'язання

$\leftrightarrow \quad \cos x = \frac{a+1}{4}$. За властивістю функції $y = \cos x$ маємо $|\cos x| \leq 1$, тому $\left|\frac{a+1}{4}\right| \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq \frac{a+1}{4} \leq 1 \leftrightarrow -5 \leq a \leq 3$. Цілими значеннями, які належать отриманому проміжку, є: –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3. Їх кількість – 9.

Відповідь: 9.

Побудуємо в програмі Maple графік прямої $\frac{a+1}{4}$, горизонтальних прямих $y = -1$ і $y = 1$ та отриманих цілочислових значень параметра *a*.

```
>plot([[seq([k,0],k=-5..3)],(a+1)/4,-1,1],a=-6..6,-1.2..1.2,style=[point,line$3],symbol=circle,symbolsize=17,scaling=unconstraied,color=[red,black$2]);
```

Після запуску даного коду на екран виводиться графік рис.3. Він наочно показує результати розв'язання.

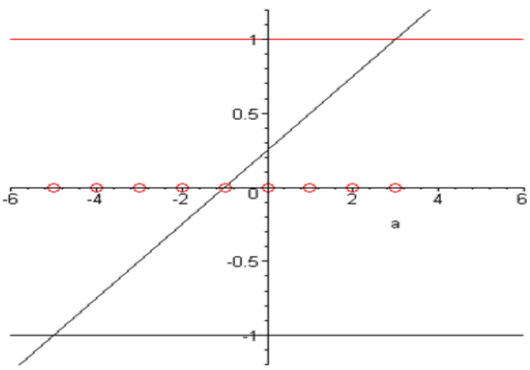

Рис. 3. Графічний розв'язок Завдання 3 в Maple

Завдання4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \cos\pi(x-1) = 1 + (y-1)^2, \\ \sin\frac{\pi y}{2} = x^2 + 2x + 2. \end{cases}$ У відповідь запишіть добуток x_0y_0, якщо $(x_0;y_0)$ – розв'язок системи рівнянь.

Розв'язання

Згідно з властивостями тригонометричних функцій, що та , отримаємо:, звідки $\begin{cases} -2 \le (y-1)^2 \le 0 \\ -2 \le (x+1)^2 \le 0. \end{cases}$ Дана система нерівностей виконується лише при $y = 1$, $x = -1$. Тоді добуток $x_0y_0 = 1 \cdot (-1) = -1$.

Відповідь: -1.

В даному випадку ми маємо трансцендентні рівняння. Слід розуміти, що розв'язання трансцендентних, зокрема, тригонометричних, рівнянь є задачею складною для будь-якої системи символьної математики. Цей приклад зайвий раз показує, що вузький набір інструментів стандартного застосування системи далеко не завжди приводить до успіху. Дійсно, спробуємо знайти розв'язок системи рівнянь використовуючи Maple:

```
> restart:
 with(RealDomain):
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh
 > solve({cos(Pi*(x-1))=1+(y1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2},{x,y});
```

Команда solve розв'язок знайти не змогла. Спробуємо побудувати графіки заданих ліній. В даному випадку кожне з рівнянь подано у вигляді неявної функції. Для побудови графіків функцій, що задані неявно, в Maple існує команда plots[implicitplot]:

```
>plots[implicitplot](cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2,x=2..2,y=-2..2);  plots[implicitplot](sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2, x=-2..2, y=-2..2);
```

Після запуску одкажемо рис.4.:

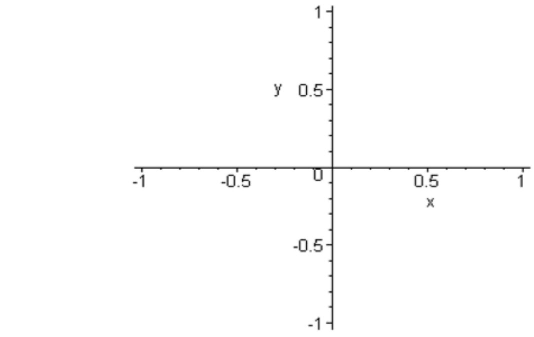

Рис. 4. графіки заданих ліній

Графіки рівнянь відсутні!

Спробуємо застосувати команду наближеного знаходження розв’язків рівнянь та систем рівнянь

```
>fsolve({cos(Pi*(x1))=1+(y1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2},{x,y},
{x=1.5..0,y=0.5..1.5});
```

fsolve $(\{\cos [\pi(x-1) = 1 + [(y-1)]^2, \sin [\pi y/2 = x^2 + 2x + 2\}]]$,{x,y}, {x=-1.5..0,y=5..15})

І в такий спосіб успіху не досягли.

Перевіримо, чи задовольняє вихідну систему рівнянь розв’язок, знайдений ручним способом:

```
>subs(x=-1,y=1,[cos(Pi*(x-1))=1+(y1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2]);eval(%);
```

$$[\cos [(-2\pi) = 1, [\sin([\pi/2) = x^2 + 2x + 2]]]$$

[1=1,1=1]

Ми впевнилися, що знайдений розв’язок систему задовольняє. Для того, щоб отримати наочну ілюстрацію, побудуємо графіки правих частин рівнянь

```
>plot([[y,1+(y-1)^2,y=-3..3],[x,x^2+2*x+2,x=3..3],1],
3..3,0..4,linestyle=[1,3$2],thickness=[2,1$2], color=[red,green,black]);
```

Запустивши дану програму на виконання одержимо рис.5.

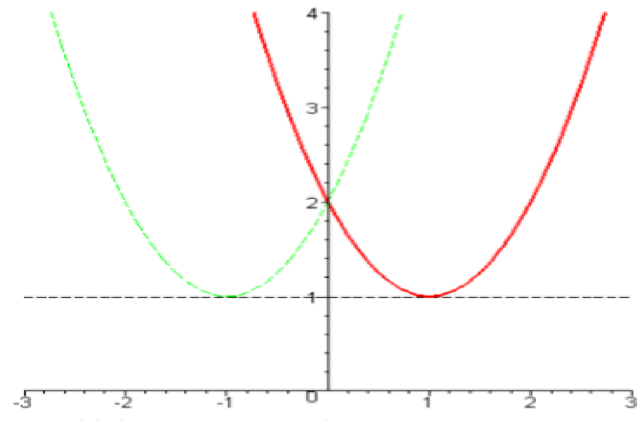

Рис. 5. Графіки правих частин рівнянь

Із побудованих графіків видно, що тільки при $x \approx -1, y \approx 1$ праві частини рівнянь досягають значення 1, залишаючись більше 1 при інших *x, y*. Оскільки ліві частини рівнянь не можуть приймати значення більші за 1, то це означає, що за умови існування розв'язку наближений розв'язок дорівнює $x \approx -1, y \approx 1$. Команда fsolve знаходить розв'язок із будь-якою точністю. Але для цього потрібно вказати прийнятний відрізок, на якому знаходиться корінь.

```
>fsolve({cos(Pi*(x-1))=1+(y-1)^2,sin(Pi*y/2)=x^2+2*x+2},{x,y},
{x=-1.1..-0.9,y=0.9..1.1});
```

$$\{x=-0.9999999998 y=1.000000000\}$$

Межі «прийнятного відрізка» потрібно визначати в кожному конкретному випадку методом підбору.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами займають важливе значення при підготовці до ЗНО. Дані завдання апробовано з учнями 11 класів під час факультативних занять з математики. Результати педагогічного експерименту показали, що в середовищі Maple та Advanced Grapher учні працюють з більшою зацікавленістю, формуються інтегративні знання з математики й інформатики, дослідницькі уміння й компетентності, довірливі стосунки між учасниками педагогічного процесу.

Разом з тим застосування можливостей ІКТ при розв'язуванні рівнянь і нерівностей з параметрами викликають низку труднощів і відповідних методичних проблем, серед яких можна навести такі: знання учнів хоча б в обмеженому обсязі потрібних можливостей ІКТ, побудова алгоритму дій в середовищі ІКТ розв’язування рівняння чи нерівності з параметром. Автоматизовані дії високого рівня узагальнення не розгортаються й тому їхній зміст, спосіб і алгоритм виконання можуть бути і невідомі учням, що звужує «орієнтовну основу учіння» при розв’язуванні задач з параметрами, виникають ризики зниження формування фундаментальних знань з математики.

Знання, уміння, математичні й інформатичні компетентності, сформовані в учнях при розв’язуванні задач з параметрами, мають інтегративний характер, а не окремі розрізнені математичні й інформатичні знання. Тому учні, які виконували індивідуальні завдання, з проблем створення способів і алгоритмів розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами з використанням можливостей ІКТ мають більш високі сформовані компетентності пошуково-дослідницької діяльності, можуть успішно розв’язувати різні складні задачі з математики з використанням можливостей ІКТ і тим самим стають більш підготовленими до життя в інформаційному суспільстві. Наведена технологія конструювання математичних завдань упроваджена в курси «Вибрані задачі математики» (4-й курс) і «Елементарна математика» (3-й курс) ЦУДПУ ім. В.Винниченка Рекомендуємо джерела [1-6].

Список використаної літератури

1. Гончаренко С.У. (2008). Фундаментальність освіти як дидактичний принцип. Шлях освіти, 1 (47), 2 – 6.

2. Крамаренко А. В. Розв’язання рівнянь та нерівностей з параметрами/ Крамаренко А. В.//Математика. – 2004. – №17-18. – с. 13-20.

3. Кушнір В.А. (2014). Конструювання навчальних завдань з математики: математичні моделі, алгоритми, програми. Інноваційні технології в освіті, 18, 030-041.

4. Кушнір В.А. (2014). Проблеми поєднання фундаментального і інноваційного при вивченні математики у вищих навчальних закладах. Витоки педагогічної майстерності: Зб. наук. праць, Полт. педаг. універ. ім. В.Г.Короленка, 20, 161 – 172.

5. Кушнір В.А. (2015). Тенденції та чинники розвитку математичної освіти та їх відображення в змісті підручників. Проблеми сучасного підручника, зб. наук. праць. К.: Педагогічна думка, 15, 317 – 327.

6. Кушнір В.А. Дослідницька діяльність у фундаментальній професійній підготовці майбутніх учителів. Наукові записки, Педагогічні науки, Кіровоградський РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 150, 23-28.
7. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике: алгебра, тригонометрия/Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. –М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
8. Рубан Е.А. Розв'язування рівнянь, систем рівнянь та нерівностей з параметрами/ Рубан Е. А.// Математика. – 2003. – С. 6-24.
9. Сержук С.В. Рівняння з параметрами/С. В. Сержук// Математика. – 2004. – №17-18. – С. 8-12.
10. Щоголєва Л.О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами/Щоголєва Л.О., Маслай Г. С. – Луцьк, 1999. – 28 с.