УДК 373.5:517.2

ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ПРИ СТВОРЕННІ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ПОХІДНА ПОКАЗНИКОВОЇ І ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ» У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Козирєва Ірина

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто методичні особливості створення системи завдань з наперед заданими властивостями з теми «Показникова і логарифмічна функції»; розглянуто спектр завдань шкільного курсу алгебри підвищеного рівня, які можуть бути розв’язані із застосуванням похідної.

Ключові слова: *показникова функція, логарифмічна функція, похідна, конструювання завдань.*

The use of ict in tasks development on the topic “Derivative of an exponential and logarithmic function” in the seniorprofile school

Iryna Kozyrieva

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor Iziumchenko L.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with the methodological features of development of system of tasks with predefined properties on the topic «Exponential and logarithmic functions». The range of compulsory and advanced algebra school course tasks that can be solved using a derivative is considered.

Keywords: *exponential function, logarithmic function, derivative, tasks development.*

Постановка проблеми. Важливою складовою загальноосвітньої підготовки, індикатором готовності суспільства до економічного розвитку, мобільності особистості в освоєнні і впровадженні нових технологій є математична освіта. Ефективність процесу навчання математики у загальноосвітній школі цілком залежить від методичної компетентності вчителя математики, який навчає учнів, від рівня його математичної та методичної грамотності, від його особистісного ставлення, інтересу до предмету, від його готовності і здатності створити умови для особистісного розвитку учнів у процесі навчання математики. Одним із важливих моментів, на які ми хочемо наголосити, є вміння, можливість, бажання вчителя створювати нові завдання (з відповідної теми) в залежності від контингенту учнів, з яким він працює (рівень стандарту вивчення математики чи профільний або поглиблений рівні; слабші чи сильніші учні та ін.). Очевидно, що завдання мають різнитися за рівнем складності. Звернемо увагу на те, що досвідчений вчитель може і повинен використовувати можливості ІКТ на всіх етапах створення таких диференційованих завдань.

Аналіз досліджень і публікацій. Процес навчання математики з використанням НІТ є актуальною темою, яка цікавить багатьох науковців. Зокрема, функціональні можливості використання НІТ в навчанні математики розглядались в роботах В.Ю. Бикова, Ю.В. Ботузової, М.І. Жалдака, М.Я. Ігнатенка, С.О. Семерікова, Ю.В. Триуса, С.О.Шлянчак, С.В. Шокалюк та ін. Дидактичні та психолого-педагогічні аспекти їх застосування наводяться в дослідженнях В.П. Безпалька, Я.І. Грудьонова, Ю.О. Жука, В.П. Зінченка, В.А. Крутецького, В.С. Леднього, І.О. Теплицького та ін. Питання комп'ютерного моделювання завдань з математики досліджували В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк та ін. [1, 2, 3].

Мета статті: Проаналізувати задачі з теми «Похідна показникової і логарифмічної функції», використати можливості математичного пакету *Maple* для підвищення якості моделювання дидактичних матеріалів з теми (з наперед заданими властивостями).

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Останнім часом у літературі, завданнях для абітурієнтів по підготовці до ЗНО, навіть у шкільних підручниках з'являються завдання, у яких містяться помилки, пов'язані з тим, що не існує фігура з тими геометричними опціями, які виходять у результаті розв'язання задачі, чи при розв'язуванні системи рівнянь з'являються виміри відрізків, які задаються комплексними числами (а отже, фігура не існує); під час розв'язування задачі приходимо до розв'язання рівняння високого степеня, точних способів розв'язання якого не існує та ін. Для того, щоб під час розв'язування складених нами завдань не виникало схожих проблем, ми проілюструємо, як ми складаємо завдання та перевіряємо себе за допомогою математичного пакету *Maple*.

Сформулюємо задачу, розв'яжемо її та перевіримо засобами *Maple*.

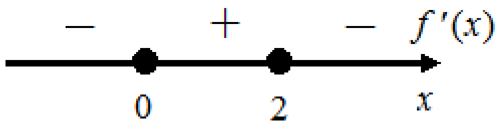
Задача. Знайдіть проміжки монотонності функції $f(x) = e^{-x} \cdot x^2$.

Розв'язання. 1) ОДЗ $x \in R$,

2) похідна $f'(x) = (e^{-x})' \cdot x^2 + e^{-x} \cdot (x^2)' = -e^{-x} \cdot x^2 + e^{-x} \cdot 2x = -x \cdot e^{-x} \cdot (x-2)$;

3) нулі похідної: $-x \cdot e^{-x} \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$;

4) знаки похідної на проміжках знакосталості:



Функція $f(x)$ зростає при $x \in [0; 2]$; спадає при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

```
> f:=exp(-x)*x^2;
```

$$f := e^{-x} x^2$$

> $f1 := diff(f, x); simplify(f1);$

$$f1 := -e^{-x} x^2 + 2\,e^{-x} x$$
$$-e^{-x} x\,(x-2)$$

> $solve(f1);$

$$0,\ 2$$

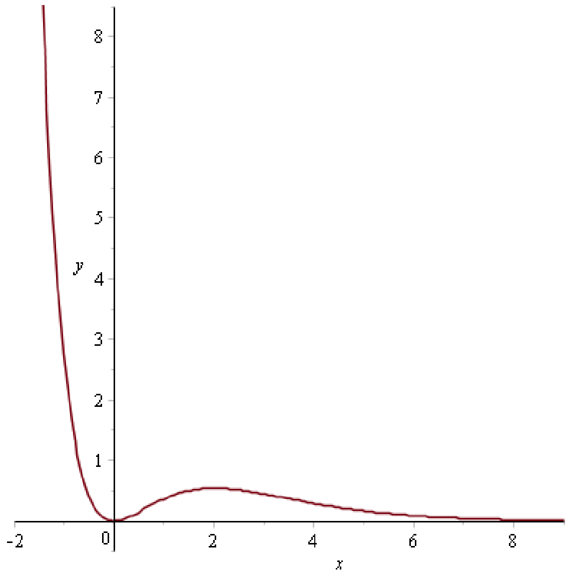
> $solve(f1 \geq 0)$

$$RealRange(0,\ 2)$$

> $solve(f1 \leq 0)$

$$RealRange(-\infty,\ 0),\ RealRange(2,\ \infty)$$

> $plot(f, x=-2..9, y=-0.5..8.5);$



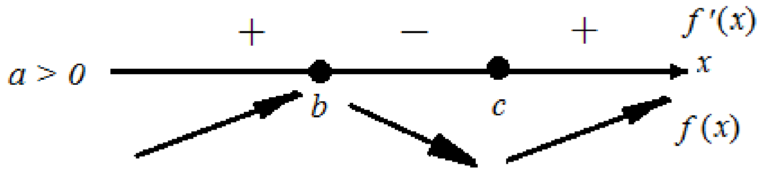
Розв’язання засобами *Maple* (та побудований графік) підтверджують правильність отриманих аналітичних результатів. При цьому вони ще і підтверджують «красу» підібраного завдання, адже отримані у процесі розв’язування рівняння мають «хороші» розв’язки, тобто внаслідок диференціювання отримано таке рівняння, яке учень може розв’язати доступними йому засобами.

Відповідь: $f(x)$ зростає при $x \in [0;2]$; спадає при $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

Матпакет *Maple* можна використовувати не тільки для перевірки правильності виконання завдань. Покажемо, яким чином можна сконструювати завдання підвищеної складності для учнів, які вивчають математику на профільному або поглибленому рівнях, на тему «Застосування похідної показникової і логарифмічної функцій» (з використанням найпростіших можливостей *Maple*) на наступному прикладі.

Завдання. Знайдіть точки екстремуму функції.

Перед нами стоїть задача створити таку функцію, яка містить добуток, *наприклад*, показникової функції e^{ax} і многочлена другого степеня, таку, щоб похідна цієї функції мала наперед задані цілі корені b і c, де a, b, c – фіксовані числа. Задамо, наприклад, функцію $t(x) = ae^{ax}(x-b)(x-c)$. Тепер використаємо можливості Maple, візьмемо інтеграл від даної функції (він завжди існує, адже інтеграли такого типу беруться інтегруванням частинами). Інтеграл від цієї функції і є готова функція $f(x)$ для завдання, яка своєю похідною буде мати функцію $t(x)$, нулі якої $x = b$ і $x = c$. Якщо $a > 0$ і $b < c$, то точка $x = b$ є точкою максимуму, $x = c$ – точкою мінімуму (при $a < 0$ і $b < c$, маємо $x = b$ – точка мінімуму; $x = c$ – точка максимуму):



Якщо вчитель хоче показати приклад, де немає точок екстремуму, він в цій же сконструйованій функції $t(x) = ae^{ax}(x-b)(x-c)$ вибирає $b = c$, тоді похідна матиме двократний корінь і точок екстремуму не буде.

Змінюючи значення a, b, c, у вчителя є можливість отримати необхідну кількість прикладів такого типу. Для прикладу візьмемо a=1; b=0 ; c=3, отримаємо функцію $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5)$, похідна якої $t(x) = e^x x(x-3)$, маємо $x = 0$ є точкою максимуму, $x = 3$ – точкою мінімуму, графік функції наведено нижче на скріншоті *Maple* 17.

$a := 1 : b := 0 : c := 3 :$

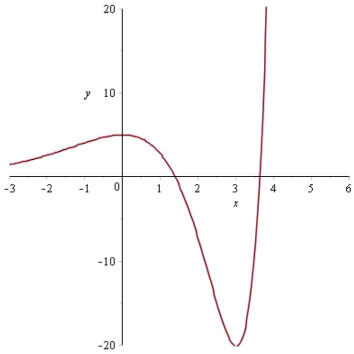
$a \cdot \exp(a \cdot x) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$

$$e^x x (x - 3)$$

$int(\%, x)$

$$(x^2 - 5x + 5) e^x$$

$plot(\%, x = b - 3 .. c + 3, y = -20 .. 20)$



Наступний скріншот ілюструє сконструйовану функцію $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 - 4x \ln x + 4x$, похідна якої $f'(x) = \ln x \cdot (x - 4)$ має два корені: $x = 1$ (є точкою максимуму), $x = 4$ (точка мінімуму)

$a := 1 : b := 4 :$

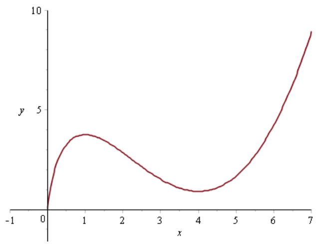
$a \cdot \ln(a \cdot x) \cdot (x - b)$

$$\ln(x) (x - 4)$$

$int(\%, x)$

$$\frac{1}{2} \ln(x) x^2 - \frac{1}{4} x^2 - 4 \ln(x) x + 4x$$

$plot(\%, x = a - 2 .. b + 3, y = -5 .. 10)$



Очевидно, що і інші завдання також можна конструювати в залежності від того, що ми хочемо отримати.

Виокремимо систему із десяти вправ, які, на наш погляд, потрібно опанувати учням одинадцятого класу при вивченні похідної показникової і логарифмічної функції (які ми склали і перевірили за допомогою *Maple*). Такі завдання можна задавати учням додому в якості додаткових завдань, під час усного заліку чи підготовки до ЗНО з математики.

Завдання 1. Знайдіть точки екстремуму функції:

а) $f(x)=\frac{1}{2x+3}+\ln(2x+3)+3$; б) $f(x)=2^{x^4-4x+1}$; в) $f(x)=-2x\ln x+6x+2$; г) $f(x)=\frac{x^2}{2^x}$;

ґ) $f(x)=\frac{\ln x/2}{x}$; д) $f(x)=\log_2{}^2(x+3)$.

Завдання 2. Знайдіть проміжки монотонності функції:

а) $f(x)=3x\ln x-6x+1$; б) $f(x)=2^{x^4-4x+1}$; в) $f(x)=\ln^4 x-2\ln^2 x$; г) $f(x)=\frac{x+3}{e^x}$;

ґ) $f(x)=6^{x^6-6x}$; д) $f(x)=\ln x+1/x$.

Завдання 3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:

а) $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$; [0; 3]; б) $f(x)=2^{x^4-4x}$; [0; 2]; в) $f(x)=e^x-x$; [–1; 2];

г) $f(x)=x^2e^x$; [–1; 2]; ґ) $f(x)=7^{x^3-3x}$; [–2; 0].

Завдання 4. Складіть рівняння дотичної до графіка функції у точці x_o:

а) $f(x)=x\cdot 2^x$; x_o= 1; б) $f(x)=2^{x^2+1}$; x_o= 0; в) $f(x)=x\cdot\ln\frac{x}{2}$; x_o= 2;

г) $f(x)=x^2\ln(x+5)+1$; x_o= 0.

Завдання 5. Складіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x)=3^{x^2-2x}$.

Завдання 6. Складіть рівняння однієї горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{x^2}{4^{x-2}}$.

Завдання 7. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=e^{3x-2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=3x+10$.

Завдання 8. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції у точці x_o: а) $f(x)=e^{1-x}$; x_o= 1; б) $f(x)=5^{x^2+2x}$; x_o= –1.

Завдання 9. Який кут утворює дотична до графіка функції з додатним напрямом Ox у точці $x_о$? а) $f(x)=\frac{x\cdot 3^x}{x+1}$; $x_о$= 0; б) $f(x)=x^3\ln(x^2+1)$; $x_о$= 0; в) $f(x)=x^2e^{-x}$; $x_о$= 2; г) $f(x)=\ln(2x-5)$; $x_о$= 3,5?

Завдання 10. Побудуйте графік функції: а) $f(x)=\ln(x^2-4x+5)$; б) $f(x)=\frac{2\ln(x+1)}{x+1}$; в) $f(x)=\frac{x}{e^x}$; г) $f(x)=e^{4x-x^2}$; ґ) $f(x)=2^{x^2-2x}-1$; д) $f(x)=\frac{x^3}{e^{x-3}}$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Використання ІКТ вчителем при підготовці до уроку дає можливість урізноманітнити урок; можливість моделювання за допомогою математичних пакетів різноманітних задач і процесів; звільняє вчителя від рутинної роботи; надає нові можливості організації колективної і індивідуальної роботи та можливість диференціювати роботу учнів у залежності від рівня підготовки, пізнавальних інтересів та ін., у тому числі можливість організувати комп'ютерний оперативний контроль.

Розглянутий матеріал корисно використати при створенні завдань з математики та при підготовці учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.

Список використаної літератури

1. Ботузова Ю.В. Використання ІКТ для обчислення похідних неявно заданих функцій // Наукові записки. – Випуск 75. – Серія: Математичні науки. – Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2019. – С. 3–13.

2. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. − 303 с.

3. Кушнір В.А. Конструювання навчальних завдань з математики: математичні модулі, алгоритми, програми //Інформаційні технології в освіті. – 2014. – № 18. – С. 30–41.