УДК 371.512

УЗАГАЛЬНЕННЯ КУРСУ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ: ВЕКТОРНИЙ МЕТОД

Жук Віталій

Науковий керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Ключник І.Г.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті висвітлюються основні методичні прийоми узагальнення курсу математики старшої школи в частині векторного методу розв'язування математичних задач. В статті робиться висновок про те, що використання у якості об'єкту узагальнень властивостей векторів та на їх базі векторного методу розв'язування при формуванні процедурних компетентностей учнів старшої школи є перспективним напрямком подальших науково-педагогічних досліджень.

Ключові слова: *процедурна математична компетентність, змістовні узагальнення, інтеграція, векторний метод.*

Generalizing the high school's mathematics course: a vector method

V. Zhuk

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent Klyuchnik I.G.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The main methods of generalizing the course of high school Mathematics as the part of the vector method of solving mathematical problems are explained in the article. The article concludes that the use of the properties of vectors and, on their basis, the vector solution method as a generalized object when forming the procedural competencies of high school students is a promising direction for further scientific and the pedagogical research.

Keywords: *procedural mathematical competence, meaningful generalizations, integration, vector method.*

Постановка проблеми. Метод розв'язування задачі вимагає не лише володіння теоретичним матеріалом змісту задачі, але й володіння компонентами методу, його особливостями, понятійним апаратом. Тобто використання того чи іншого методу при розв'язуванні задачі являє собою інтеграцію знань, а сам метод є інтегративним образом методу розв'язування задач. Обґрунтування даного факту представляє інтерес з точки зору проведення змістовних узагальнень курсу математики старшої школи в частині використання конкретного методу – векторного методу розв’язування задач.

Аналіз досліджень і публікацій. Одним із ефективних способів формування цілісних міждисциплінарних та міжнаукових знань у сучасному світі є інтегративний підхід у навчанні. Реалізація цього підходу в освіті дає можливість розглядати зміст, форми та методи навчання окремої дисципліни у процесі взаємодії з іншими, співставляти закономірності та закони навчального предмету з відповідної галузі із закономірностями та законами природи, встановлювати взаємозв’язки між окремими структурними ланками різних наук.

На рівні з міждисциплінарними та міжнауковими зв’язками важливу роль у засвоєнні структурованого, узагальненого та систематизованого навчального матеріалу відіграють міжгалузеві зв’язки. Інтеграція знань дає змогу не просто засвоїти нові знання з тієї чи іншої теми, але й зрозуміти місце цих знань у загальній структурі навчального предмету. Математичні задачі інтегративного змісту дають змогу охопити більше навчального матеріалу, ніж звичайні задачі. Такі задачі потребують свідомого володіння не лише теоретичним матеріалом теми, яка вивчається, але й навчальним матеріалом інших тем. Теоретичним аспектам формування такої системи у шкільному навчанні присвячено праці Возняка О.В. [1], Кміта Я.М. [2], Нічишиної В.В., Ріжняка Р.Я. [6], Приймакова О.Г., Молявко О.І. [7], С. Ракова [8], Шестакова С.А. [9] та інших. Практичні аспекти формування математичних компетентностей досліджуються в працях Кушніра В.А., Ріжняка Р.Я. [3; 4; 5], Ракова С.А. [8],

Мета статті: висвітлення методичних прийомів проведення узагальнення математичних знань старшокласників на прикладі застосування до розв’язування задач векторного методу.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Побудуємо модель уроку з використанням інтегрованого образу векторного методу розв'язування задач. Урок розраховано на проведення в 11 класі при вивченні теми «Призма та піраміда. Розв'язування задач». Освітньою метою побудованої моделі уроку є узагальнити вміння та навички учнів розв'язувати стереометричні задачі з тем «Призми» та «Піраміди»; ознайомити та вдосконалити вміння та навички учнів використовувати векторний метод при розв'язуванні математичних стереометричних задач. Оскільки побудована модель буде містити різні етапи, зокрема: актуалізацію опорних знань, вивчення нового матеріалу (розв'язування ввідних вправ), розв'язування задач (використання знань, умінь та навичок), узагальнення та систематизація основних теоретичних положень, то обраним типом уроку є комбінований.

Основна увага при проведенні уроку зосереджуватиметься на розв'язуванні стереометричних задач векторним методом, тому задачам у структурі уроку відводиться основна роль.

Особливу увагу варто приділити актуалізації опорних знань учнів з теми «Вектори у просторі. Дії над векторами», оскільки при розв'язуванні задач необхідно оперувати поняттями, діями та уміннями з даної теми.

З метою кращого уявлення учнями поняття вектора у просторі, для наочної демонстрації можна використати математичні пакети, зокрема математичний пакет Maple, який дає змогу представити вектори у 3D вигляді.

Задача 1. Перевіримо з використанням Maple чи колінеарні вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-3,1,2), \vec{b} = (7,-1,0), \vec{p} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{q} = 3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b}$. Побудуємо вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$ та за малюнком переконаємося, що вектори не колінеарні (рис. 1).

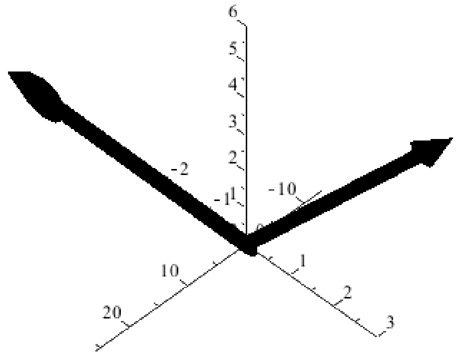


Рисунок 1. Перевірка на колінеарність векторів

```
restart :
with(plots) :
with(linalg) :
a := [-3, 1, 2];
b := [7, -1, 0];
p := 2 * a - b;
q := 3 * a + 5 * b;
pv := arrow(p, width = [0.02, relative], head_length
    = [0.15, relative] ) :
qv := arrow(q, width = [0.02, relative], head_length
    = [0.15, relative]) :
plots[display](pv, qv);
```

Для повторення елементів призми та піраміди можна також скористатися математичним пакетом та розглянути 3D моделі геометричних тіл. Розв’яжемо за допомогою Maple наступну задачу.

Задача 2. Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершинами якого є точки $S(0;0;0), A(5;0;0), B(0;5;0), C(0;0;5)$.

Дано: $S(0;0;0), A(5;0;0), B(0;5;0), C(0;0;5)$ – вершини тетраедра.

Знайти: площу поверхні тетраедра.

Розв’язання:

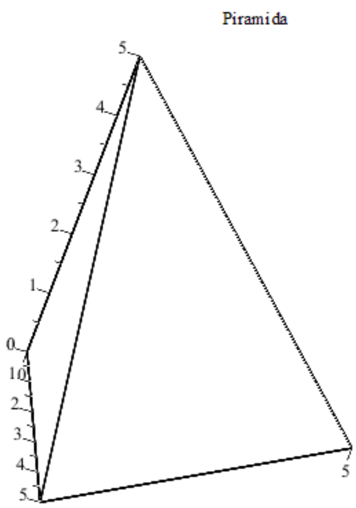
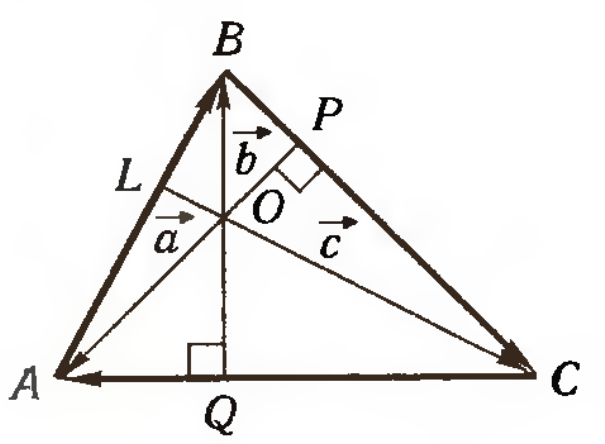


Рисунок 2. Ілюстрація до задачі 2

```
>
with(geom3d) :
point(S, 0, 0, 0) :
point(A, 5, 0, 0) :
point(B, 0, 5, 0) :
point(C, 0, 0, 5) : triangle(AOB, [A, O, B]) :
gtetrahedron(T, [O, A, B, C]) :
St := area(AOB);
Sp := 3·St;
draw(T, axes = normal, title = "Piramida");
```

$$St := \frac{25}{2} \quad Sp := \frac{75}{2}$$

На етапі вивчення нового матеріалу реалізовуватиметься розв’язування ввідних вправ з метою ознайомлення учнів з особливостями використання методу векторів. Для початку доводиться уже відоме учням твердження з планіметрії, яке вони уже доводили у попередніх класах, це дає змогу повторити загальну структуру використання векторного методу.



Задача 3. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці [65, с. 320].

Дано: $\Delta ABC, AP \perp BC, BQ \perp AC.$ O – точка перетину AP і BQ , що лежить на CL .

Рисунок 3. Ілюстрація до задачі 3.

Довести: $CL \perp AB$.

Доведення:

Введемо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA},$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}.$$

Потрібно довести, що $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}.$

За умовою $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0,$ виконавши перетворення складемо наступні вирази

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, з цього слідує, що

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$

$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$,

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \vec{c} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$,

так як $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AB}$ – протилежні вектори, то $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, а це означає, що $CL \perp AB$, тобто відрізок CL – висота $\Delta ABC.$

При розв'язуванні даної задачі використовуються наступні поняття, дії та вміння без яких неможливе використання векторного методу: вектор, добуток векторів, різниця векторів, перпендикулярність векторів, протилежно направлені та співнаправлені вектори.

Наступна задача пропонується для демонстрації використання векторного методу для розв'язування саме стереометричної задачі.

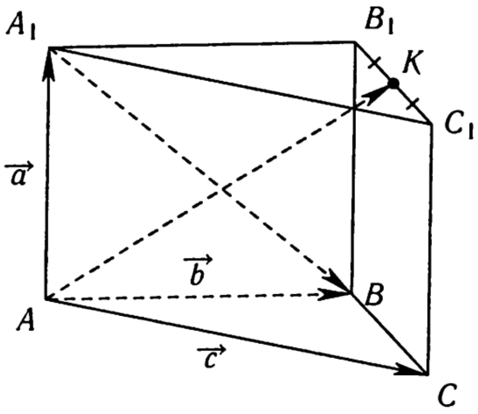


Рисунок 4. Ілюстрація до задачі 4.

Задача 4. В прямій призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка $K-$ середина ребра $B_1C_1, AA_1{:}AB{:}AC = 3{:}4{:}5$. Знайти кут $\angle BAC$, якщо відомо, що прямі AK і A_1B взаємно перпендикулярні [32].

Дано: $ABCA_1B_1C_1-$ пряма призма, точка $K-$ середина ребра $B_1C_1, AA_1{:}AB{:}AC = 3{:}4{:}5, AK \perp A_1B$.

Знайти: $\angle BAC$.

Розв'язання:

Нехай $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c},$

$\angle BAC=\alpha.$ Візьмемо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ за базисні і складемо таблицю множення векторів базису, вважаючи, що $AA_1 = 3l,$ де $l-$ деяке число; тоді за умовою отримаємо, що $AB = 4l, AC = 5l.$

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$		0	0
$\vec{b}$	0	$16l^2$	$20l^2 cos\alpha$
$\vec{c}$	0	$20l^2 cos\alpha$	$25l^2$

Маємо: $\overrightarrow{A_1B}=\vec{b}-\vec{a}, \overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{\overline{2 2\vec{a}++\vec{b}+(\vec{c})}}.$ Із умови перпендикулярності векторів $\overrightarrow{A_1B}$ і $\overrightarrow{AK}$ слідує, що $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AK}=0,$ тобто $\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=0 \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b}+\vec{b^2}+\vec{b}\vec{c}-2\vec{a^2}-$

$-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}=0.$ Звідси $16l^2+20l^2cos\alpha-18l^2=0.$ Скоротивши на l^2 та звівши подібні, отримаємо $20cos\alpha-3=0 \Leftrightarrow cos\alpha=\frac{1}{10} \Rightarrow \alpha=\frac{\arccos 1}{10}.$

Відповідь: $\angle BAC = \frac{\arccos 1}{10}$.

При розв'язуванні даної задачі використовуються наступні поняття, дії та вміння без яких неможливе використання векторного методу: вектор, базисні вектори, добуток векторів, різниця векторів, множення вектора на число, перпендикулярні вектори, кут між векторами.

На етапі розв'язування задач для оптимізації навчального процесу можна використати таку форму організації діяльності учнів як групова (учні поділяються на групи по 2-3 особи, кожна група отримує свою задачу, після розв'язування задачі учні з поясненням презентують її розв'язок біля дошки). Така форма організації діяльності учнів дає змогу охопити більшу кількість задач, а оскільки кожна група учнів буде пояснювати розв'язок своєї задачі, то таким чином всі учні класу будуть ознайомлені з розв'язанням даних задач.

Пропонуємо наступні задачі для розв'язування на даному уроці:

Задача 5. Довести, що медіани тетраедра перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 3:1, рахуючи від вершини [22, с. 35].

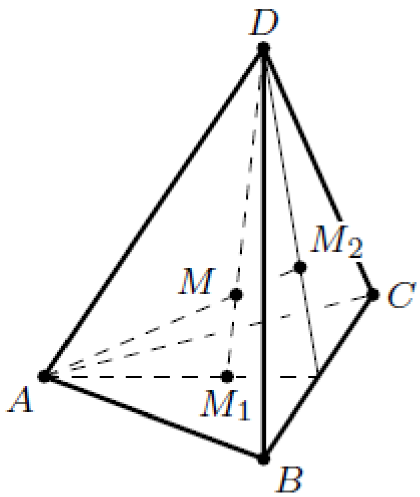


Рисунок 5. Ілюстрація до задачі 5.

Дано: $ABCD$ – тетраедр, DM_1, AM_2, BM_3 – медіани.

Довести: M – точка перетину медіан тетраедра, $\frac{DM}{MM_1} = \frac{AM}{MM_2} = \frac{BM}{MM_3} = 3:1$.

Доведення

Візьмемо на медіані DM_1 тетраедра $ABCD$ точку M таку, що $\frac{DM}{MM_1} = 3$.

За формулою поділу відрізка у даному відношенні маємо:

$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OM_1}}{4}$, де O – довільна точка простору.

Враховуючи, що центроїд M_1 трикутника ΔABC задовольняє відношення:

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

отримаємо

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Для точки M', яка ділить довільну з трьох інших медіан тетраедра $ABCD$ у відношенні 3:1, рахуючи від вершини, отримаємо те ж саме відношення (воно симетричне відносно $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$). Отже, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ і всі чотири медіани тетраедра перетинаються в одній точці M і кожна з них ділиться цією точкою у відношенні 3:1, рахуючи від вершини тетраедра. Точку M називають центроїдом тетраедра.

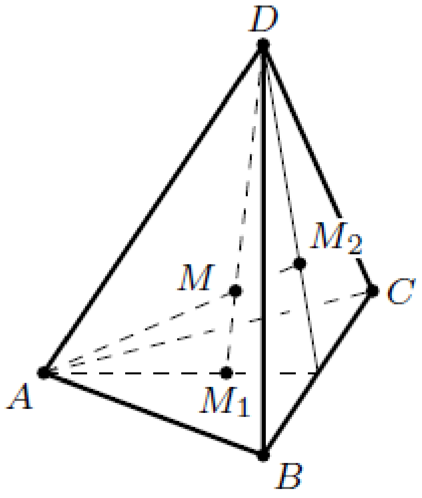


Рисунок 6. Ілюстрація до задачі 6.

Задача 6. Виразити довжину медіани DM_1 тетраедра $ABCD$ через довжину його ребер [22, с. 39].

Дано: $ABCD$ – тетраедр, DM_1, AM_2, BM_3 – медіани.

Знайти: виразити довжину медіани $\overrightarrow{DM_1}$ через довжину ребер тетраедра.

Розв'язання

Довжину ребер тетраедра $ABCD$ позначимо так: $AD = a, BD = b,$ $CD = c, BC = a_1, CA = b_1, AB = c_1$.

Так як M_1 – центроїд $\Delta ABC,$ то

$$\overrightarrow{DM_1} = \frac{1}{3\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)}.$$

Піднесемо дану рівність до квадрата та отримаємо наступне:

$$DM_1{}^2 = \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}\right).$$

Запишемо рівність $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$.

Обчисливши скалярний квадрат, отримаємо

$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB},$

звідки

Аналогічно знаходимо, що

Підставивши отримані значення в початкову рівність, отримаємо формулу

$$m^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9},$$

яка виражає довжину медіани DM_1 тетраедра через довжини його ребер.

Відповідь: $m^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9}.$

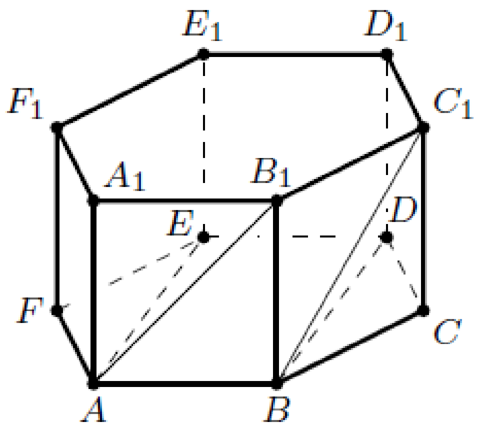


Рисунок 7.Ілюстрація до задачі 7.

Задача 7. Бічні грані правильної шестикутної призми – квадрати. Знайти величину кута між перехресними діагоналями суміжних граней призми [22, с. 40].

Дано: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильна шестикутна призма, бічні грані якої – квадрати.

Знайти: кут між прямими AB_1 та BC_1.

Розв'язання

Розкладемо вектори $\overrightarrow{AB_1}$ та $\overrightarrow{BC_1}$ за не компланарними векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AB},$

$\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$. Отримаємо

$\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}.$

Довжина векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ однакова, приймемо її за 1, тоді $AB_1 = BC_1 =$

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівний $60°. \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}.$

Відповідно,

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\vec{a} + \vec{c})(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Нехай $\varphi -$ кут між прямими AB_1 і BC_1, тоді

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{AB_1 \cdot BC_1} = \frac{3}{4}.$$

Отже, $\varphi = \frac{\arccos 3}{4}$.

Відповідь: $\varphi = \frac{\arccos 3}{4}$.

На етапі узагальнення та систематизації основних теоретичних положень доцільно запропонувати учням, опираючись на розв'язані задачі, вказати основні компоненти розв'язування задач векторним методом.

Підведення підсумків уроку можна провести по різному, як варіант можна запропонувати учням поставити запитання одне одному з теми уроку, це дасть змогу систематизувати та узагальнити знання учнів.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Таким чином, побудована модель навчального процесу з використанням інтегрованого образу векторного методу розв'язування задач в шкільному курсі математики старшої школи розрахована на використання у процесі узагальнення старшокласниками матеріалу шкільного курсу математики. Основна увага при плануванні уроку узагальнення зосереджувалася на розв'язуванні стереометричних задач векторним методом, тому задачам у структурі уроку відводиться основна роль.

Список використаної літератури

1. Возняк О.Г. Метод координат у геометричних задачах. Навч. посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. – 64 с.
2. Кміт Я.М. Концептуальні підходи до інтегративного навчання у професійній школі.//Педагогічні інновації: ідеї, реалії, перспективи. – Суми, 1998. – С. 26-27.
3. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.

4. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики // Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

5. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 34–39.

6. Нічишина В., Ріжняк Р. Інтеграція професійних знань майбутніх вчителів математики. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2007. – 92 с.

7. Приймаков О.Г., Молявко О.І. Вибрані розділи математики. Навчальний посібник. – Х.: Скорпіон, 2004. – 236 с

8. Раков С. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

9. Шестаков С.А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. – М.: МЦНМО, 2005. – 112 с.