УДК 517.0

ОБЕРНЕНІ ФУНКЦІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Долінська Валентина

Науковий керівник: професор Волков Ю. І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В роботі систематизовано навчальний матеріал з проблеми дослідження, підібрано систему вправ, доцільність яких експериментально перевірено під час практики на фізико-математичному факультеті; проаналізовано стан проблеми в літературі, зроблені відповідні висновки, логічно використано досліджуваний апарат для досягнення поставлених завдань.

***Ключові слова:**. обернені функції, обернені тригонометричні і обернені гіперболічні функції.*

Inverse functions in the school of mathematics

V. Dolinska

Scientific supervisor: professorVolkov Yu.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The paper systematizes the study material on the problem of research, the system of exercises is selected, the expediency of which is experimentally tested during practice at the Faculty of Physics and Mathematics; at a sufficiently high scientific and methodological level the state of the problem in the literature is analyzed, the relevant conclusions are made, the investigational apparatus is logically used to achieve the set tasks.

***Keywords:**. inverse functions, inverse trigonometric and inverse hyperbolic functions.*

Постановка проблеми. Сучасна тригонометрія широко застосовується в різних галузях математики, зокрема в геометрії, інших науках, у техніці. Тому зрозуміло, що окремі питання тригонометрії, такі, як елементи досліджень тригонометричних функцій і побудова фрагментів їх графіків, розв’язання тригонометричних рівнянь, доведення тригонометричних тотожностей, обчислення тригонометричних виразів тощо, входять до програми вступних екзаменів з математики до вищих навчальних закладів. Слід додати також, що всі основні відомості з тригонометрії використовуються для розв’язання багатьох геометричних задач на екзамені. Отже, знання з тригонометрії конче потрібні абітурієнтам.

Що стосується гіперболічних функцій, то в школі їх не розглядають, а у вузі вивчають лише означення та деякі властивості. Хоча ці функції знаходять своє використання в електротехніці, в будівельній механіці, опорі металів, теоретичній фізиці, у територіі відносності та інших галузях.

Стаття присвячена розв'язуванню наведених проблем.

Мета статті: полягає у систематизації матеріалу з метою підвищення рівня знань у процесі вивчення тригонометрії, математичного аналізу, геометрії, механіки та фізики.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Функція $y = g(x)$ називається ***оберненою*** до функції $y = f(x)$.

За зазначених умов обернена функція $y = g(x)$ існує і неперервна при $x \in (c; d)$. При цьому виконуються рівності:

$$g(f(x)) = x, \quad x \in (a; b);$$
$$f(g(x)) = x, \quad x \in (c; d). \qquad (1)$$

Графіки функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$ симетричні відносно бісектриси першого координатного кута.

Наприклад, функція $y = e^x$, $-\infty < x < \infty$, визначає залежність між змінними x, y, яку можна також подати рівнянням $x = \ln y$, $y > 0$. Скориставшись позначеннями $f(x) \equiv e^x$, $g(x) \equiv \ln x$ подамо рівності (1) у вигляді:

$$g(f(x)) \equiv \ln e^x = x, \quad -\infty < x < +\infty;$$
$$f(g(x)) \equiv e^{\ln x} = x, \quad x > 0. \qquad (2)$$

Графіки функцій $y = e^x$, $y = \ln x$ симетричні відносно бісектриси першого координатного кута (див. рисунок).

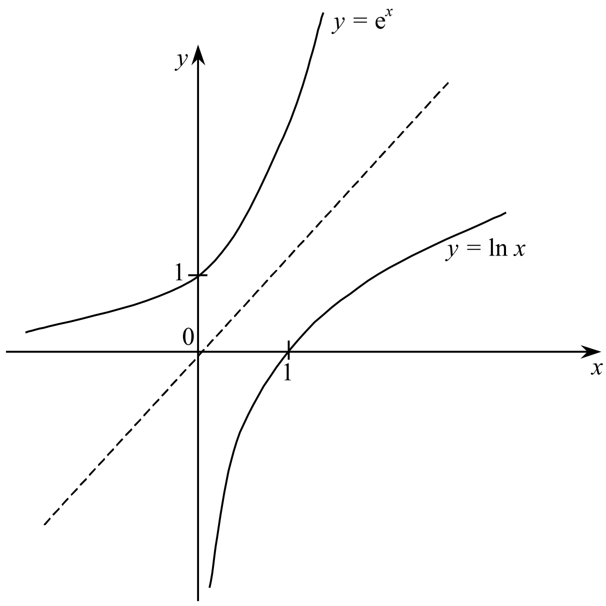

Рис.1

Арксинусом x $\arcsin x$ називається кут, що задовольняє нерівності (1) і синус якого дорівнює x:

$$\sin(\arcsin x) = x,\ -1 \le x \le 1. \qquad (2)$$

Наведемо деякі числові значення функції $\arcsin x$:

$$\arcsin 0 = 0;\ \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \qquad (3)$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3};\ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Функція $y = \arcsin x$ — непарна, тобто

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad (4)$$

Корисно запам’ятати такі формули:

$$\sin(\mathrm{corcsin}\, x) = x,\ |x| \le 1;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2},\ |x| \le 1; \qquad (5)$$

$$\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1;$$

$$\mathrm{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ x \ne 0,\ |x| \le 1.$$

Приклад. Обчислити $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

Виконуємо обчислення:

$$\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Приклад. Розв’язати нерівність

$$\arcsin x > \frac{\pi}{6}.$$

Маємо:

$$\sin(\arcsin x) > \sin\frac{\pi}{6};\ x > \frac{1}{2}.$$

Оскільки $|x| \le 1$, то остаточно дістаємо: $\frac{1}{2} < x \le 1$.

Функція $y = \cos x$ неперервна і монотонна при $x \in [0;\pi]$. Обернена до неї функція $y = \arccos x$, $x \in [-1;1]$, називається ***арккосинусом*** (див. рисунок).

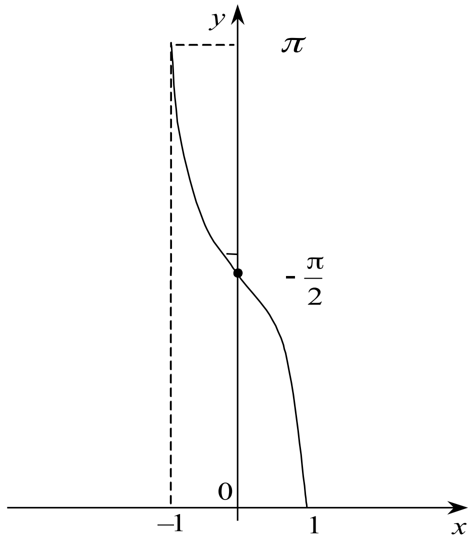

Рис.2

Функція $y = \arccos x$ монотонно спадає на відрізку $[-1;1]$ і задовольняє такі нерівності:

$0 \le \arccos x \le \pi$. (1)

Арккосинусом x $\arccos x$ називається кут, що задовольняє нерівності (1) і косинус якого дорівнює x:

$\cos(\arccos x - x)$, $-1 \le x \le 1$. (2)

Із симетрії графіка відносно точки $\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)$ випливає рівність:

$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$,

звідки знаходимо формулу

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. (3)

Порівнюючи графіки функцій $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$, дістаємо:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$. (4)

Наведемо деякі числові значення $\arccos x$:

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arccos 1 = 0$. (5)

Корисно запам'ятати такі формули:

$\cos(\arccos x) = x$, $|x| \le 1$;

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \le 1$;

$\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$, $x \ne 0$, $|x| \le 1$

$\mathrm{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$. (6)

Приклад. Обчислити значення функції $\cos\left(\arccos\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4}\right)$.

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\right)=\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)-$$

$$-\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{4^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{3^2}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{8}}{12}.$$

Приклад. Обчислити значення функції $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$.

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}=2{,}4\cdot$$

Функція $y=\operatorname{tg}x$ неперервна і монотонна при $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Обернена до неї функція $y=\operatorname{arctg}x$, $x\in(-\infty,\infty)$, називається ***арктангенсом*** (див. рисунок).

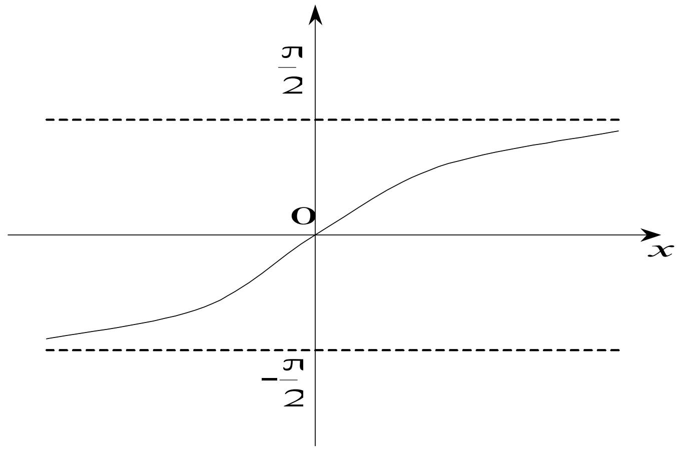

Рис.3

Функція $y=\operatorname{arctg}x$ монотонно зростає, непарна і задовольняє нерівності:

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

При цьому виконуються граничні співвідношення:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Арктангенсом x $\operatorname{arctg}x$ називається кут, що задовольняє нерівності (1) і тангенс якого дорівнює x:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x,\ -\infty<x<\infty. \qquad (3)$$

Функція $y=\operatorname{arctg}x$ набуває таких значень:

$$\operatorname{arctg}0=0,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},\ \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}; \qquad (4)$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\ \operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Корисно запам’ятати деякі формули:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,;\ -\infty < x < \infty,$$
$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,;\ -\infty < x < \infty, \qquad (5)$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x\,;\ -\infty < x < \infty,$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}\,;\ x \neq 0,\ -\infty < x < \infty.$$

Приклад. Обчислити значення $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Приклад. Обчислити значення суми $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) + \cos(\operatorname{arctg}3)$.

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) + \cos(\operatorname{arctg}3) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Виведемо формулу для суми арктангенсів.

Нехай справджується рівність

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = z\ .$$

Знаходимо значення

$$\operatorname{tg}z = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)} = \frac{x+y}{1-xy}\ .$$

Звідси маємо:

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + k\pi\ \ (k = 0,\ \pm 1). \qquad (6)$$

Оскільки виконуються нерівності (1), то число k може набувати значень $k = 0,\ \pm 1$.

Приклад. Знайти значення суми $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}\ .$$

Приклад. Знайти значення суми $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3$.

$$\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 = \operatorname{arctg}\frac{2+3}{1-2\cdot 3} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}\ .$$

Функція $y = \operatorname{ctg}x$ неперервна і монотонна на проміжку $(0;\pi)$. Обернена до неї функція $y = \operatorname{arctg}x\ \ (-\infty < x < \infty)$ називається ***арккотангенсом*** (див. рисунок).

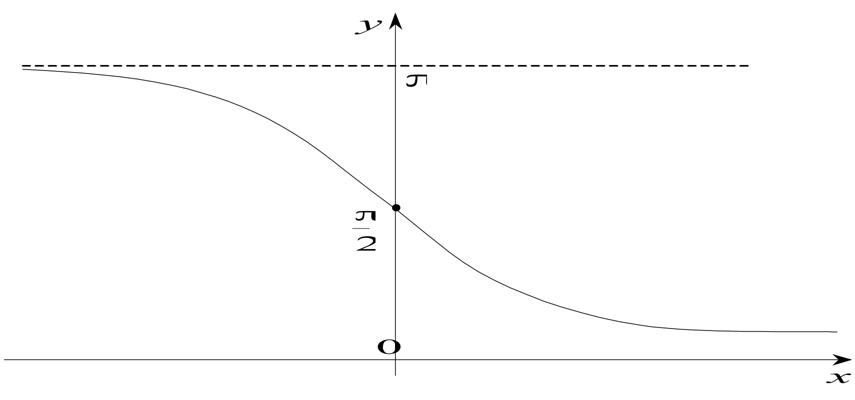

Рис.4

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно спадає і задовольняє нерівності:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi. \qquad (1)$$

При цьому виконуються граничні співвідношення:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi. \qquad (2)$$

Арксотангенсом x $\operatorname{arcctg} x$ називається кут, що задовольняє нерівності (1) і котангенс якого дорівнює x:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \ -\infty < x < \infty. \qquad (3)$$

Розглядаючи графіки арктангенса і арккотангенса, доходимо висновку, що завжди виконуються рівності:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}; \qquad (4)$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \qquad (5)$$

Наведемо табличні значення арккотангенса:

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}; \ \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}; \ \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}; \ \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0. \qquad (6)$$

Корисно запам’ятати такі формули:

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ -\infty < x < \infty,$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \ -\infty < x < \infty, \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0, \ -\infty < x < \infty,$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \ -\infty < x < \infty.$$

Приклад. Обчислити значення функції $\cos(\operatorname{arcctg} 7 + \operatorname{arcctg} 8)$.

$$\cos(\operatorname{arcctg} 7 + \operatorname{arcctg} 8) = \cos(\operatorname{arcctg} 7)\cos(\operatorname{arcctg} 8) -$$

$$- \sin(\operatorname{arcctg} 7)\sin(\operatorname{arcctg} 8) = \frac{7}{\sqrt{1+7^2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{1+8^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+7^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+8^2}} = \frac{11}{\sqrt{130}}.$$

Приклад. Обчислити значення функції $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 3)$.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 3) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 2) + \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 3)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 2)\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 3)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

Розглянемо складніші приклади обчислення значень обернених тригонометричних функцій.

Приклад. Знайти вираз для суми $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$. Нехай

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = z.$$

Тоді

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg} z,$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{x+y}{1-xy}, \ z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi \ \ (k = 0, \pm 1).$$

Остаточно маємо:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi \ \ (k = 0, \pm 1).$$

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Відповідно до поставленої мети та задач дослідження під час вирішення наукової проблеми і впровадження розроблених положень розглянуто означення, властивості, графіки, походження обернених функцій, обернених тригонометричних і обернених гіперболічних функцій; розв'язано рівняння та нерівності та різні приклади з даної теми; систематично опрацьований матеріал; розроблено конспект уроку з використанням ІКТ у шкільному курсі математики.

Список використаної літератури

1. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. ІІ семестр. Академічний рівень. // Бабенко С.П. – Харків: Основа, 2011. – 253 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 304 с.
3. Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 256 с.
4. Бедрій Я. І. Безпека життєдіяльності. Навчальний посібник. – Київ: Кондор, 2009. – 286 с
5. Державні санітарні правила і норми влаштування, утримання загальноосвітніх навчальних закладів та організації навчально-виховного процесу, затверджені постановою Головного санітарного лікаря України від 14.08.2001 №63 (ДСанПіН 5.2.2.008–01). – [Електронний документ] – режим доступу: http://zakon.nau.ua/doc/? code=v0063588–01