УДК 371.512

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗМІСТОВНОЇ ЛІНІЇ В МАТЕМАТИЦІ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Водзинська Галина

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті висвітлюються основні методичні прийоми узагальнення функціональної лінії в шкільному курсі математики через технологію вивчення та використання взаємно обернених процесів. В статті робиться висновок про те, що використання у якості об'єкту узагальнень властивостей показникової та логарифмічної функцій при формуванні процедурних компетентностей учнів старшої школи є перспективним напрямком подальших науково-педагогічних досліджень.

Ключові слова: *процедурна математична компетентність, змістовні узагальнення, технологія вивчення взаємно обернених процесів, показникова функція, логарифмічна функція.*

Indicative and logarithmic functions as a generalization of the functional content line in the mathematics of the older school

H. Vodzynska

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article highlights the basic methodical techniques of generalization of a functional line in a school course of Mathematics through technology of study and the use of mutually inverted processes. The article concludes that the use of the generalizations of the properties of index and logarithmic functions in the formation of procedural competences of high school students is a promising direction for further scientific and pedagogical research.

Keywords: *procedural mathematical competence, meaningful generalizations, technology of studying mutually inverse processes, exponential function, logarithmic function.*

Постановка проблеми. При аналізі учнівських робіт з математики впадає в вічі те, що для розв'язування рівнянь, нерівностей чи їх систем учні не завжди повною мірою використовують досить значний арсенал засобів, яким володіють. Зокрема, дуже рідко абітурієнти застосовують властивості неперервних функцій та графіки навіть тоді, коли характер співвідношень вказує саме цей шлях як самий простий і раціональний. У зв'язку з цим однією з методичних ідей при вивченні компонентів функціональної лінії шкільного курсу математики є використання прийомів узагальнення та систематизації знань та умінь учнів.

Аналіз досліджень і публікацій. Навчання математики у сучасній старшій школі вимагає впровадження в навчальний процес потужного мотиваційного арсеналу методів та засобів навчання. Перш за все це сучасні інформаційно-комунікаційні технології навчання, застосування яких суттєво впливає на якість навчання та інтелектуальний розвиток учнів. Але такі технології в свою чергу потребують мобілізації найбільш ефективних методик та технологій активізації навчальної діяльності учнівської молоді. І одну з основних ролей у таких процесах відіграють технології узагальнення та систематизації навчального матеріалі, а також технології вивчення та активного використання взаємно обернених процесів. Теоретичним аспектам формування такої системи у шкільному навчанні присвячено праці В. Давидова [1], В. Кушніра [2], О. Пометун [6; 7], С. Ракова [8], П. Єрднієва, Б. Єрднієва [9] та інших. Практичні аспекти формування математичних компетентностейдосліджуються в працях В. Кушніра, Р. Ріжняка [3; 4; 5], С. Ракова [8].

Мета статті: висвітлення методичних прийомів проведення узагальнення функціональної лінії на прикладі вивчення показникової та логарифмічної функцій в старшій школі..

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Розглянемо реалізацію методики вивчення показникової та логарифмічної функцій як узагальнення функціональної змістовної лінії в старшій школі на прикладі вивчення циклу “показникові вирази та логарифми – показникові та логарифмічні функції – показникові та логарифмічні рівняння – показникові та логарифмічні нерівності” (далі в тексті – Цикл). Методика вивчення цього

Циклу буде будуватися на методі протиставлення двох взаємно обернених процесів – піднесення до степеня та знаходження логарифмів.

При визначенні порядку формування циклу існує певна ступінь свободи. Тому приймемо у якості оптимального такий порядок формування циклу – вирази $\longrightarrow$ функції $\longrightarrow$ рівняння $\longrightarrow$ нерівності. Доцільність формування Циклу саме таким способом пояснюється особливостями проходження мислительних процесів у учнів старших класів, а отже необхідністю використання абстрактно-дедуктивного методу введення понять Циклу.

Розглянемо особливості структури навчального матеріалу Циклу та методичні особливості викладання цього матеріалу у контексті методики вивчення показникової та логарифмічної функцій як узагальнення функціональної змістовної лінії в старшій школі.

Зауважимо, що поняття степеня розкладається у шкільному курсі математики ще у 8-му класі – “Степінь з цілим показником”, потім у 9 класі – “Степінь з раціональним показником”. З поняттям степеня зв’язано досить велика кількість понять та математичних речень, для вивчення яких поняття степеня є основою. Тому цей факт позначається на структурі матеріалу Циклу в тому розумінні, що при вивчення поняття логарифму та його властивостей протилежні поняття (степінь та його властивості) будуть повторюватися. Таким чином, першим етапом вивчення Циклу є паралельне введення понять степеня та логарифма:

$$\left.\begin{array}{l} a^x = b \\ a>0\ \ a\neq 1\ \ b>0 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} \log_a b = x \\ a>0\ \ a\neq 1 b>0 \end{array}\right.$$

Основною метою такого введення є вияснення учнями взаємно-оберненої природи вказаних понять. Це дасть можливість відразу ввести основну логарифмічну тотожність:

$$a^{\log_a b} = b$$

Для закріплення введених понять необхідно розв’язати такий цикл задач:

1. Знайти число b за його log та основою a;

2. Знайти основу логарифма за заданим числом *b* та його логарифмом;

3. Знайти логарифм числа *b* за основою *a*.

Практичне застосування степенів та логарифмів базується на основних властивостях степенів та логарифмів. Їх теж доцільно вивчати паралельно, т.я. при доведенні властивостей логарифмів використовуються відповідні властивості степенів. Більше того, формулювання пар відповідних властивостей доцільно представити у вигляді суперсимволів. Розглянемо це докладніше.

Властивість 1:

$\frac{\text{Добуток степенів}}{\text{Сума логарифмів}}$ дорівнює $\frac{\textit{степеню}}{\textit{логарифму}}$, $\frac{\textit{показник}}{\textit{підлогарифмічний вираз}}$ якого

є $\frac{\textit{сумою показників степенів}}{\textit{добутком підлогарифмічних виразів}}$

Такий суперсимвол зображає два символічні записи:

$$\begin{array}{l|l} a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2} & \log_a b_1+\log_a b_2=\log_a b_1\cdot b_2. \\ \textit{де } a>0, a\neq 1 & \textit{де } a>0, a\neq 1, b_1, b_2>0 \end{array}$$

Розглянемо доведення властивості логарифмів. Нехай $\log b_1 = x_1$ і $\log b_2 = x_2$

Очевидно, що за означення логарифма:

$$a^{x_1}=b_1 \text{ і } a^{x_2}=b_2$$

Помноживши почленно, маємо:

$$a^{x_1+x_2}=b_1\cdot b_2$$

Або: $log_a(b_1\cdot b_2)=x_1+x_2$

Підставивши значення x_1 і x_2 в останню рівність, маємо:

$$log_a(b_1\cdot b_2)=log_a b_1+log_a b_2$$

Слід відзначити, що поза тверджень справджується і для скінченого числа співмножників, більшого 2:

$$\begin{array}{l|l} a^{x_1}\cdot a^{x_2}....a^{x_n}=a^{x_1+x_2+\dots x_n}, & \log_a b_1+\log_a b_2+\dots+\log_a b_n=\log_a(b_1\cdot b_2\cdot\dots\cdot b_n), \\ \textit{де } a>0, a\neq 1 & \textit{де } a>0, a\neq 1, b_1\, b_2 ..., b_n>0 \end{array}$$

У якості вправи можна запропонувати учням довести пару тверджень для випадку трьох співмножників.

Аналогічно розглядаються і інші пари основних властивостей. Запишемо їх у символічній формі:

Властивість 2.

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}, \quad \| \log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \frac{b_1}{b_2},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$ ‖ де $a > 0$, $a \neq 1$, $b_1, b_2 > 0$

Властивість 3:

$$\left(a^x\right)^m = a^{xm}, \quad \| \log_a b^m = m \cdot \log_a b,$$

де $a > 0, a \neq 1$ ‖ де $a > 0, a \neq 1, b > 0$

Властивість 4:

$a^0 = 1,$ де $a > 0, a \neq 1$ ‖ $\log_a 1 = 0,$ де $a > 0, a \neq 1$

Властивість 5:

$a^1 = a,$ де $a > 0, a \neq 1$ ‖ $\log_a a = 1,$ де $a > 0, a \neq 1$

Наступний етап вивчення циклу – співставлення двох взаємно обернених операцій – *логарифмування* та *потенціювання*. Засвоєння цих операцій доцільно провести шляхом розв’язування пар взаємно-обернених задач.

Приклад 1.Прологарифмувати вираз:

$$x = \frac{a^5}{c^3} \; \| \; \log_2 x = 5\log_2 a - 3\log_2 c$$

Операції логарифмування та потенціювання дозволяють підготувати учнів до введення понять показникової та логарифмічної функції. Паралельне їх введення доцільно провести за таким планом:

1. Функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ ‖ Функція $y = \log_a x$, де $a > 0, a \neq 0$

називається показниковою ‖ називається логарифмічною

2. Аналітичне виявлення факту взаємної оберненості показникової та логарифмічної функцій.

3. Побудова графіків конкретних показникової та логарифмічної функцій за таблицею $\left(y = 2^x, y = \log_2 x\right)$ та виявлення факту симетричності графіків функцій відносно прямої $y = x$.

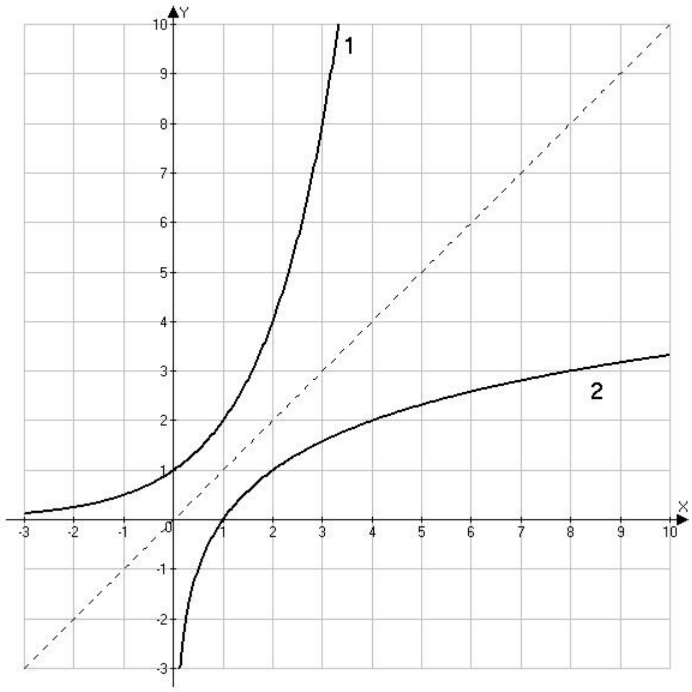

Рис. 1. Графіки функцій $y = 2^x$ (1) та $y = log_2 x$ (2).

4. Теоретичне узагальнення про взаємне розташування графіків взаємно обернених функцій.

5. Дослідження властивостей функцій:

а) $X=R,\ У=(0;+\infty)$ ‖ $X=(0;+\infty),\ У=R$

б) $\forall x\ \ y>0;$ при $x < 0$ $0 < y < 1$ для $a > 1$ ‖ $y>0$ при $x \in (1;+\infty)$ при $a>1$

при $x > 0$ $y > 1$ для $a > 1$ ‖ $y<0$ при $x \in (0;1)$

при $0<a<1$ – навпаки.

в) при $a > 1$ обидві функції монотонно зростаючі, при $0 < a < 1$ обидві функції монотонно спадні.

г) при $x=0$ $y=1$ $y \neq 0$ ‖ при $y=0$ $x=1;$

при $x \to -\infty$ $y \to 0$ для $a > 1$ ‖ при $x \to 0$ $y \to -\infty$ для $a>1$

при $x \to +\infty$ $y \to +\infty$ для $0 < a < 1$ ‖ при $x \to +\infty$ $y \to +\infty$ для $0<a<1$

Примітка: 1. Після вивчення кожної пари властивостей слід робити гіпотичне узагальнення про співставлення.

2. Вивчені властивості пари функції слід представити у матричному вигляді.

Завершує цикл вивчення показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей. Коротко послідовність вивчення цього матеріалу можна представити у вигляді плану.

1) Показникові та логарифмічні рівняння:

а) означення показникових та логарифмічних рівнянь;

б) загальний вигляд найпростіших рівнянь;

$- \ a^x = b$, ‖ $- \ \log_a x = b$,

де $a > 0,\ a \neq 0,\ b > 0$ ‖ $a > 0,\ a \neq 1$

$- \ a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ ‖ $- \ \log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$,

де $a > 0,\ a \neq 1$ ‖ $a > 0,\ a \neq 1$

в) розв’язання найпростіших рівнянь.

г) означення показникових та логарифмічних нерівностей.

д) загальний вигляд найпростіших нерівностей:

$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ ‖ $\log_a f(x) > \log_a \varphi \geq (x)$

$a > 0,\ a \neq 1$ ‖ $a > 0,\ a \neq 1$

е) розв’язування найпростіших нерівностей.

є) розв’язування показниково-логарифмічних рівнянь та нерівностей.

ж) розв’язування показникових та логарифмічних систем рівнянь та нерівностей.

Наведемо приклади типової задачі, яка розв’язувалася з учнями під час проведення експериментальної роботи.

Приклад 1. Взявши за основу логарифма (степеня) вираз $x + 4$, а за вирази під знаком логарифма (за показники степенів) відповідно $x^2 + x - 2$ та $6 - x$, скласти нерівності з однаковим знаком, розв’язати їх та порівняти отримані розв’язки.

Оберемо знак $\leq$ та складемо відповідні нерівності:

$$\log_{x+4}(x^2 + x - 2) \leq \log_{x+4}(6 - x)$$

та

$$(x+4)^{(x^2+x-2)} \leq (x+4)^{(6-x)}$$

Використовуючи властивості показникової та логарифмічної функцій, отримаємо такий хід розв'язування вказаних нерівностей. Для логарифмічної:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+4>1 \\ x^2+x-2 \leq 6-x \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+4<1 \\ x^2+x-2 \geq 6-x \\ 6-x>0 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-3 \\ (x+4)(x-2) \leq 0 \\ (x+2)(x-1)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -4<x<-3 \\ (x+4)(x-2) \geq 0 \\ x<6 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in]-3;\ -2[\cup]1;2] \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$$

Отже, розв'язком логарифмічної нерівності буде проміжок $x \in]-3;\ -2[\cup]1;2]$. Розв'яжемо показникову нерівність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+4>1 \\ x^2+x-2 \leq 6-x \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+4<1 \\ x^2+x-2 \geq 6-x \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-3 \\ (x+4)(x-2) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -4<x<-3 \\ (x+4)(x-2) \geq 0 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in]-3;2] \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$$

Отримали, що розв'язком показникової нерівності з таким же знаком, з тією ж основою (але тепер основою степеня) та з тими ж показниками степеня, що мають такі ж вирази, як і підлогарифмічні вирази у першому рівнянні, буде проміжок $x \in]-3;2]$. Зазначимо, що порівняння отриманих розв'язків нерівностей приводить до висновку, що розв'язки відрізняються на область звуження множини допустимих значень змінної логарифмічної нерівності (має виконуватися умова додатності виразу, що знаходиться під знаком логарифму: $x^2 + x - 2 > 0$).

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Таким чином, з'ясування особливостей вивчення взаємно обернених функцій як узагальнення функціональної лінії нами проводилося з використанням технології вивчення та дослідження взаємно обернених процесів. В процесі дослідження ми керувалися тезою, що технологія вивчення взаємно обернених процесів – це таке оперування з навчальним процесом, яке складається з логічно різних, але інформаційно та структурно спільних елементів, що сприяє кращому збереженню знань у пам'яті та швидкому їх відтворенню у навчальній діяльності. Вимогам такої технології задовольняють в математиці взаємно-обернені дії (операції, функції, теореми, задачі) і взагалі групи споріднених понять та речень, які утворюють єдину систему знань. Володіючи інформаційною спільністю, такі знання тяжіють для спільного та одночасного вивчення на одних і тих же уроках.

З використанням технології вивчення та дослідження взаємно обернених процесів нами розроблена методика проведення узагальнення функціональної лінії на прикладі вивчення та використання властивостей показникової та логарифмічної функцій в старшій школі.

Для апробації розробленої методики було проведено організаційну роботу та проведено експериментальні заняття щодо вивчення та використання властивостей показникової та логарифмічної функцій в старшій школі в процесі узагальнення функціональної лінії на завершальній стадії вивчення математики в загальноосвітній школі.

Список використаної літератури

1. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.
2. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
3. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
4. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики // Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.
5. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 34–39.
6. Пометун О.І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку сучасної освіти // Рідна школа. – 2005. – № 1. – С. 65–69.
7. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасні заняття: інтерактивні технології навчання. – К.: А.С.К., 2004. – 192с.
8. Раков С. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

9. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрепление дидактических единиц в обучении математике: книга для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.