РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ

Ярослав Левицький

Науковий керівник: доктор історичних наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розкривається послідовність розгляду питань, на яких базується розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром. Наведено способи розв'язання рівняння з параметром. Наведено різні способи розв’язання рівнянь та нерівностей з параметром.

Ключові слова: *рівняння, корінь рівняння, невідома, розв'язання рівняння, параметр, рівняння з параметром, функція, графік функції, змінна, нерівність, нерівність з параметром*

Solution of equations and inequalitiers with the parameter

Y. Levickiy

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhnyak R.Ya.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,Kropyvnytsky, Ukraine

The article reveals the sequence of the consideration of the questions based on the solution of the equations with parameter.

Key words: *equation, root of the equation, unknown, solving of the equation, parameter, function, inequality.*

Постановка проблеми. Освітній математичний рівень учня залежить від уміння оперувати числами, виразами, умінням розв'язувати рівняння(лінійні, квадратні, біквадтратні, тригонометричні, показникові, логарифмічні і т.д), а також нерівності. Вершиною розуміння задач з рівняннями є уміння бачити усі можливі випадки його розв'язання в залежності від значення параметра. Складнішою задачею є перехід від цього ж рівняння з параметром до розв'язання нерівності з параметром. Рівняння і нерівності з параметром є логічним продовженням рівнянь і нерівностей, що вивчалися в курсі алгебри.

Аналіз досліджень і публікацій.

До цієї проблеми зверталися В.А.Кушнір і Р.Я.Ріжняк в [1;2;5;7], де автори досліджували проблеми використання обраного способу для розв’язування різних математичних задач з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів. Інтегративний підхід у навчанні дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами, співставляти закономірності та закони навчальної дисципліни, яка вивчається, із закономірностями та законами природи. Так, наприклад, у задачі «Знайти значення $\boldsymbol{sin\,18^{\circ}}$ », автори проілюстрували, що дана задача породжує серію задач на знаходження синусів, косинусів, тангенсів чи котангенсів різних гострих кутів. Кінцевий результат формування інтегрованого образу способу розв'язування залежать від мети, поставленої вчителем чи викладачем. При формуванні інтегрованого образу наперед обраного способу розв'язання серії задач вчитель організовує процес мисленого об'єднання компонентів інтегрованого образу за їх істотними ознаками. Дослідження, проведене у статті В.А.Кушніра і Р.Я.Ріжняка підтверджує доцільність використання наперед обраного способу розв'язання серії задач з метою формування стійкого інтегрованого образу.

Метою статті є дослідження найбільш вдалих підходів до розгляду питання «Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром».

Виклад основного матеріалу.

Розглянемо проблему дослідження на прикладі задачі з параметром, а вже потім перейдемо до нерівності. На сьогодні рівняння з параметром є досить актуальною темою і для вчителів. Розуміння рівнянь з параметром дає певну перевагу над рівняннями, де цього параметра не має.

Приклад 1. Розв'язати рівняння для кожного а: $|x-2|+|x+1|=ax+3$

І спосіб(Аналітичний).

Очевидно, що при будь-якому а, $x=0$, знайдемо інші розв'язки рівняння:

$|x-2|+|x+1|=ax+3 \rightarrow$ знайдемо нулі підмодульних виразів: $\begin{matrix} x-2=0 \\ x+1=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ x=-1 \end{matrix}$

$\rightarrow$ дані числа розбивають числову пряму на три проміжки: 1) $x\,\epsilon\,(-\infty;-1]$, 2) $x\,\epsilon\,(-1;2]$, 3) $x\,\epsilon\,(2;+\infty)$. Розв'яжемо рівняння на кожному з проміжків:

1) $(-\infty;-1]: -x+2-x-1=ax+3 \rightarrow x=\frac{-2}{a+2} \rightarrow$ якщо $a=-2, то\ x\,\epsilon\,\emptyset$, якщо $a\neq-2, то\ x=\frac{-2}{a+2}$

$x = \frac{-2}{a+2} \to \frac{-2}{a+2} \leq -1 \to \frac{a}{a+2} \leq 0 (a \neq -2)$ → дріб менший за нуль тоді і тільки тоді, коли чисельник більший за нуль, а знаменник менший за нуль або чисельник менший за нуль, а знаменник більший за нуль → $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ a+2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ a+2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \to$

$\left[\begin{array}{c} a \,\epsilon\, \emptyset \\ a \,\epsilon\, (-2; 0] \end{array}\right. \to a \,\epsilon\, (-2; 0]$

2) $(-1; 2]$: $-x + 2 + x + 1 = ax + 3 \to$ якщо $a = 0, то\ x \,\epsilon\, (-1; 2]$, якщо $a \neq 0$, то $x = 0$

3) $(2; +\infty)$: $x - 2 + x + 1 = ax + 3 \to x = \frac{4}{2-a} \to$ якщо $a = 2, то\ x \,\epsilon\, \emptyset$, якщо $a \neq 2, то\ x = \frac{4}{2-a}$

$x = \frac{4}{2-a} \to \frac{4}{2-a} > 2 \to \frac{2a}{2-a} > 0 (a \neq 2)$ → дріб більший за нуль тоді і тільки тоді, чисельник і знаменник більший за нуль або чисельник і знаменник менші за нуль → $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a > 0 \\ 2-a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a < 0 \\ 2-a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{c} a \,\epsilon\, (0; 2) \\ a \,\epsilon\, \emptyset \end{array}\right. \to a \,\epsilon\, (0; 2)$

Відповідь: при а є $\{-2; 2\}$ $x = 0$(при будь-якому а, х=0) при а є $(-\infty; -2)$ або при а є $(2; +\infty)$ х=0(один корінь), при а є $(-2; 0)$ х = $\frac{-2}{a+2}$, при а є (0;2) х = $\frac{4}{2-a}$, при а = 0, х є $[-1; 2]$

II спосіб(Графічний).

Розв'яжемо дане рівняння графічно. Введемо функції: 1) $y = |x-2| + |x+1| - 3$, 2) $y = ax$ Спочатку побудуємо графік функції $y = |x-2| + |x+1|$, для цього знайдемо нулі підмодульних виразів: $x - 2 = 0\ і\ x + 1 = 0$, $x = 2, x = -1 \to$ дані числа розбивають числову пряму на три проміжки: 1) $x \,\epsilon\, (-\infty; -1]$, на даному проміжку маємо таку функцію: $y = |x-2| + |x+1| = -(x-2) - (x-1) = -2x + 1$, 2) $x \,\epsilon\, (-1; 2]$, на даному проміжку маємо таку функцію: $y = |x-2| + |x+1| = -(x-2) + (x-1) = 3$, 3) $x \,\epsilon\, (2; +\infty)$, на даному проміжку маємо таку функцію: $y = |x-2| + |x+1| = +(x-2) + (x-1) = 2x - 1$. Побудуємо графік:

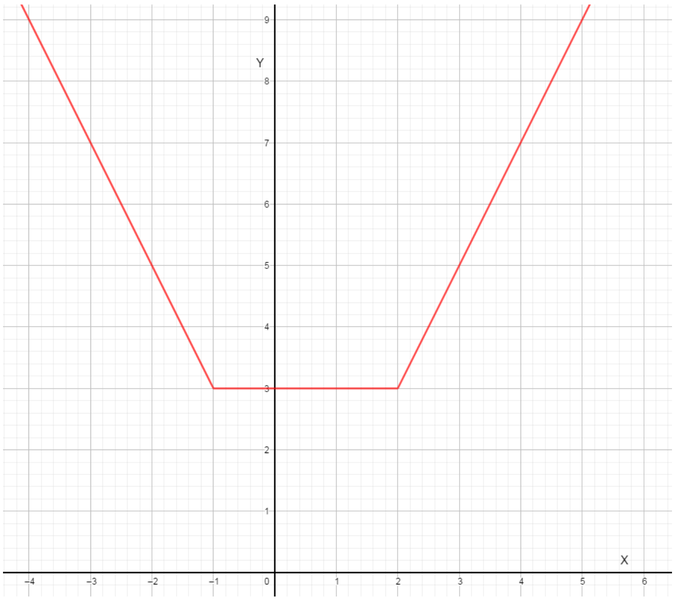

рис.1

Щоб побудувати графік функції $y = |x-2| + |x+1| - 3$, ми кожну точку графіка функції $y = |x-2| + |x+1|$ опустимо на три одиниці вниз(геометричне перетворення графіка функції), маємо:

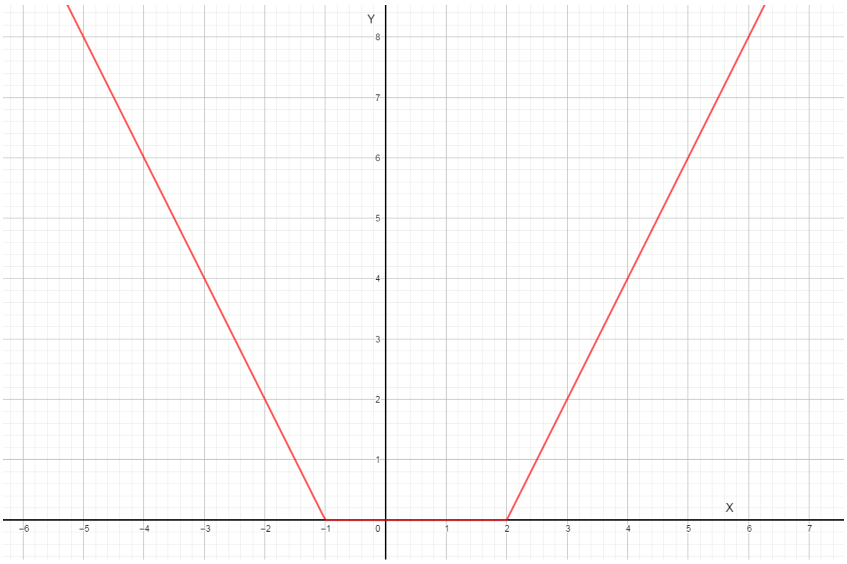

рис.2

Дослідимо властивості функцій $y = ax$, де а - параметр

1) Якщо а=0, то у=0 і х є [-1;2], 2) Якщо а є (0;2), то $x1 = \frac{4}{2-a}$,$x2 = 0$, 3) Якщо а є [2;+∞), рівняння має один корінь х=0, 4) Якщо а є (-2;0), то $x1 = \frac{-2}{a+2}$,$x2 = 0$, 5) Якщо а є (-∞;2], то рівняння має один корінь, х=0. (рис. 3)

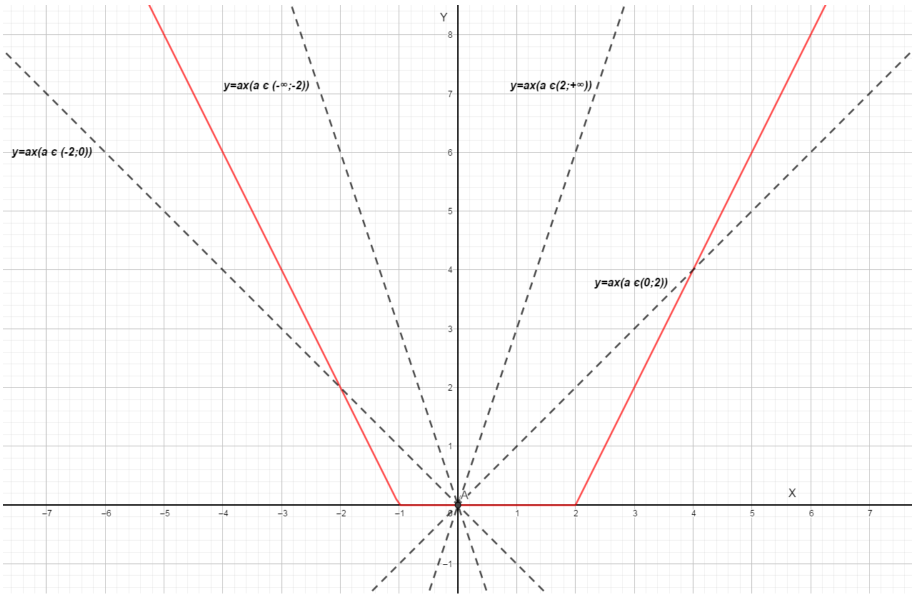

рис.3

Примітка: при будь-якому а, $x = 0$

Відповідь: 1) а=0, х є [-1;2], 2) а є (-2;0) $x1 = \frac{4}{2-a}$,$x2 = 0$, а є (0;+2), $x1 = \frac{-2}{a+2}$,$x2 = 0$, 3) а є (-∞;2]∪ [2;+∞), рівняння має один корінь х=0.

III спосіб

Побудуємо графік рівняння: $|x-2|+|x+1|-ax-3=0$, Графік ілюструє, що якщо а=0, то х є [-1;2], 2) Якщо а є (0;2), то $x1 = \frac{4}{2-a}$,$x2 = 0$, 3) Якщо а є [2;+∞), рівняння має один корінь х=0, 4) Якщо а є (-2;0), то $x1 = \frac{-2}{a+2}$,$x2 = 0$, 5) Якщо а є (-∞;2], то рівняння має один корінь, х=0.

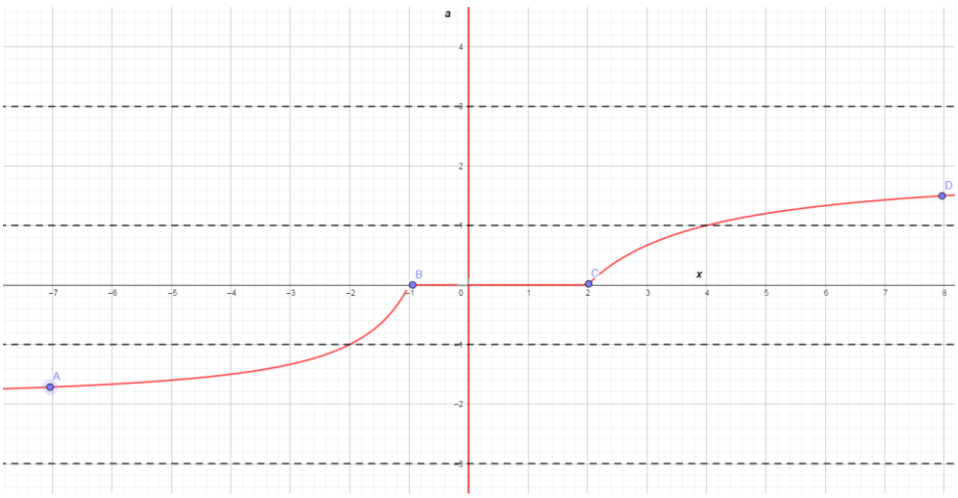

рис.4

Отже, якщо a=0, x є [-1;2], якщо a є (-2;0) пряма перетинає дугу AB, причому: $x1 = \frac{4}{2-a}$,$x2 = 0$ (два корені), якщо a є (0;+2), пряма перетинає дугу CD, причому: $x1 = \frac{-2}{a+2}$,$x2 = 0$, якщо a є (-∞;2]∪ [2;+∞), то x=0 (один корінь).

Відповідь: 1) a=0, x є [-1;2], 2) a є (-2;0) $x1 = \frac{4}{2-a}$,$x2 = 0$, a є (0;+2), $x1 = \frac{-2}{a+2}$,$x2 = 0$, 3) a є (-∞;2]∪ [2;+∞), рівняння має один корінь x=0.

Дана задача породжує серію задач. Так, від рівняння ми перейдемо до нерівності.

Приклад 2. При будь-якому значенні параметра a розв'язати нерівність: $|x-2| + |x+1| > ax + 3$

Графічно. Введемо функції: 1) $y = |x-2| + |x+1| - 3$, 2) $y = ax$ і побудуємо їх графіки(рис. 5):

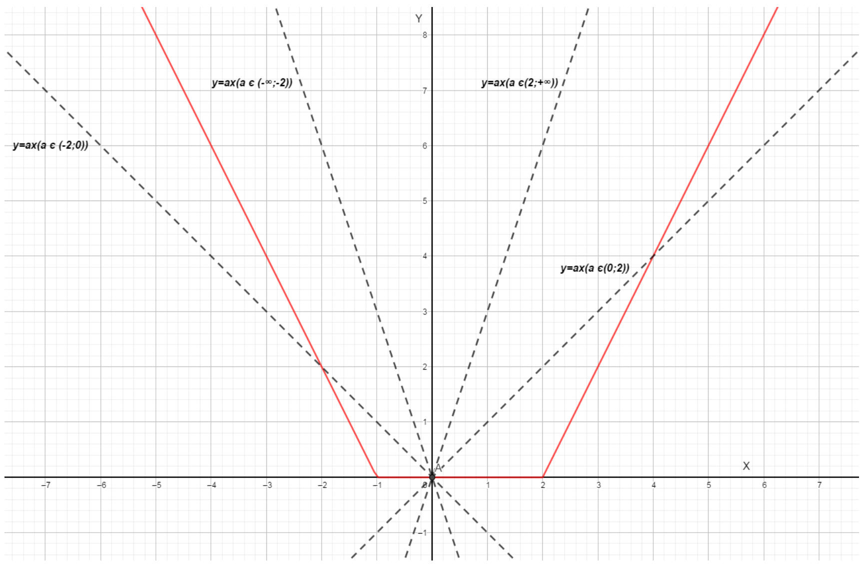

Рис. 5

$$|x-2| + |x+1| > ax + 3 \leftrightarrow |x-2| + |x+1| - 3 > ax$$

Маємо нерівність: $|x-2| + |x+1| - 3 > ax$, де a - параметр. Будемо надавати значення параметру a(матимемо пряму за будь-якого значення a) і розв'яжемо нерівність графічно. Вкажемо де графік функції $y = |x-2| + |x+1| - 3$ вище за графік функції $y = ax$, при змінюваному значенню параметра a. Маємо випадки:

1) a є {0}, то x є $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

2) a є $[2; +\infty]$, то x є $(-\infty; 0)$

3) a $\in (-\infty; -2]$, то x $\in (0; +\infty)$

4) a $\in$ (-2; 0), то x $\in \left(-\infty; \frac{-2}{a+2}\right) \cup (0; +\infty)$

5) a $\in (0; 2)$, то x $\in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{2-a}; +\infty)$

Відповідь: при a $\in \{0\}$ x $\in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, при $[2; +\infty]$ x $\in (-\infty; 0)$, при a $\in (-\infty; -2]$ x $\in (0; +\infty)$, при a $\in$ (-2; 0) x $\in \left(-\infty; \frac{-2}{a+2}\right) \cup (0; +\infty)$, при a $\in (0; 2)$ x $\in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{2-a}; +\infty)$.

Висновки. Отже, проведене дослідження дає підстави підтвердити доцільність використання різних способів розв’язування рівнянь та нерівностей з параметром з метою формування стійкого інтегрованого образу. Тому планування формування згаданого інтегрованого образу слід проводити в результаті аналізу компонентів задачної ситуації, потім – детального співставлення та порівняння згадуваних компонентів з метою подальшого мисленого об’єднання компонентів інтегрованого образу обраного способу розв’язання серії задач за їх істотними ознаками. Тоді результатом такої діяльності буде формування в учнів знань та умінь інтегрованої математичної діяльності.

Література.

1. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв’язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.

2. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв’язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп’ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.

3. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа : учебник 10-11 кл. сред. шк. / Колмогоров, А. Н., Абрамов, А. М., Дудницын, Ю. П. - 2-е изд. - М. : Просвещение, 1991. - 319 с.

4. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 класу / М. І. Шкіль – К. : Зодіак-ЕКО, 2002. – 270 с.

5. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.

6. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.

7. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові записки КДПУ ім. В.Винниченка. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2010 – с. 156-161.