

УДК 519.22

## СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ У ТВОРАХ ШОПЕНА

Малохатко Я., Акбаш К.

***Анотація.** В статті проілюстровано статистичне дослідження закономірностей у музиці за допомогою коефіцієнтів кореляції, а саме визначено тісноту зв'язку між основними музичними елементами (інтервали, частота нот та їх тривалості) у творах Ноктюрн №20 та Вальс №7 Шопена. Встановлено закономірність у цих композиціях на основі обрахованих коефіцієнтів кореляції. У даному дослідженні вперше проводиться статистична обробка музичних елементів у музичних творах на предмет виявлення математичних закономірностей.*

***Ключові слова:** статистичний аналіз, коефіцієнт кореляції, інтервали, тривалості нот, частота нот.*

### STATISTICAL ANALYSIS OF LAWS IN THE WORKS OF SHOPEN

***Abstract.** The article shows the statistical study of regularities in music using correlation coefficients, namely, the shortness of the connection between the main musical elements (intervals, the frequency of music and their duration) in the works of Nocturne No. 20 and Waltz No. 7 Chopin. A regularity in these compositions is established on the basis of the calculated correlation coefficients. In this study, for the first time, the statistical processing of musical elements in musical works is performed for the purpose of revealing mathematical regularities.*

***Key words:** statistical analysis, correlation coefficient, intervals, duration of music, frequency of notes.*

**Постановка проблеми.** Міждисциплінарні підходи й методи пізнання виникають на межі різних наукових дисциплін. Такі підходи притаманні сучасним науковим дослідженням, які дають можливість отримати нові знання. Тож ми вирішили зробити такий експеримент з фундаментальною наукою, царицею наук – математикою та основним видом мистецтва – музикою. У даному дослідженні вперше проводиться статистична обробка музичних елементів у музичних творах на предмет виявлення математичних закономірностей.

Дослідження музичного мистецтва за допомогою математико-статистичного апарату не надто популярні, тема аналізу закономірностей в музичних творах Шопена досліджується вперше. Вона приваблива для творчих

осіб, які цікавляться музичним мистецтвом. Дана робота є прикладом для досліджень закономірностей у творах композиторів та підтвердженням того, що математика та музичне мистецтво мають зв'язок.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Першим, хто поставив музику в один ряд з математикою, був Піфагор. Філософію своєї школи він засновував на тому, що музику варто сприймати як наукову дисципліну, а не практичне заняття. Він створив інструмент, відомий усьому світу як монохорд Піфагора. Деякі музичні твори стають більш популярними й дуже поширеними виключно завдяки своїй «математичній» структурі. Тож не дивна й популярність хіп-хопу з його ритмічним бітом і повторюваними імпровізаціями, частково обумовлена нашою вродженою математичною потребою в ритмі й повторюваних елементах. Зв'язок між музикою й математикою викликав також тривалі дебати про так званий «Ефект Моцарта», про який уперше заговорили на початку 1990-х [1].

**Метою** даної роботи є виявлення статистичних закономірностей та аналіз статистичних даних у творах Шопена.

У нашому дослідженні для виявлення статистичних закономірностей у творах Шопена ми розглянемо два твори: Ноктюрн № 20 і Вальс № 7. Ми обрали ці твори, тому що вони написані в одній тональності (до# мінор), тому є порівнюваними не тільки на рівні тривалостей та інтервалів, але і на рівні нот. Також ми порівнювали лише основні мелодії творів без акомпанементу, так як саме мелодія запам'ятовується при прослуховуванні музичного твору.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для обчислення закономірностей у творах, ми зібрали статистичні дані по основних музичних елементах, які підлягають статистичній обробці: ноти, інтервали та тривалості нот.

**Ноти.** На прикладі першої строчки твору Ноктюрн №20 продемонструємо принцип підрахунку частоти кожної ноти.

# Nocturne in C-sharp Minor

Op. posthumous (1830)



Рис. 1. Зразок збору статистичних даних по частоті зустрічі нот

На графіку візуально проаналізуємо відмінності у частоті зустрічі кожної ноти у цих двох творах (у відсотках).

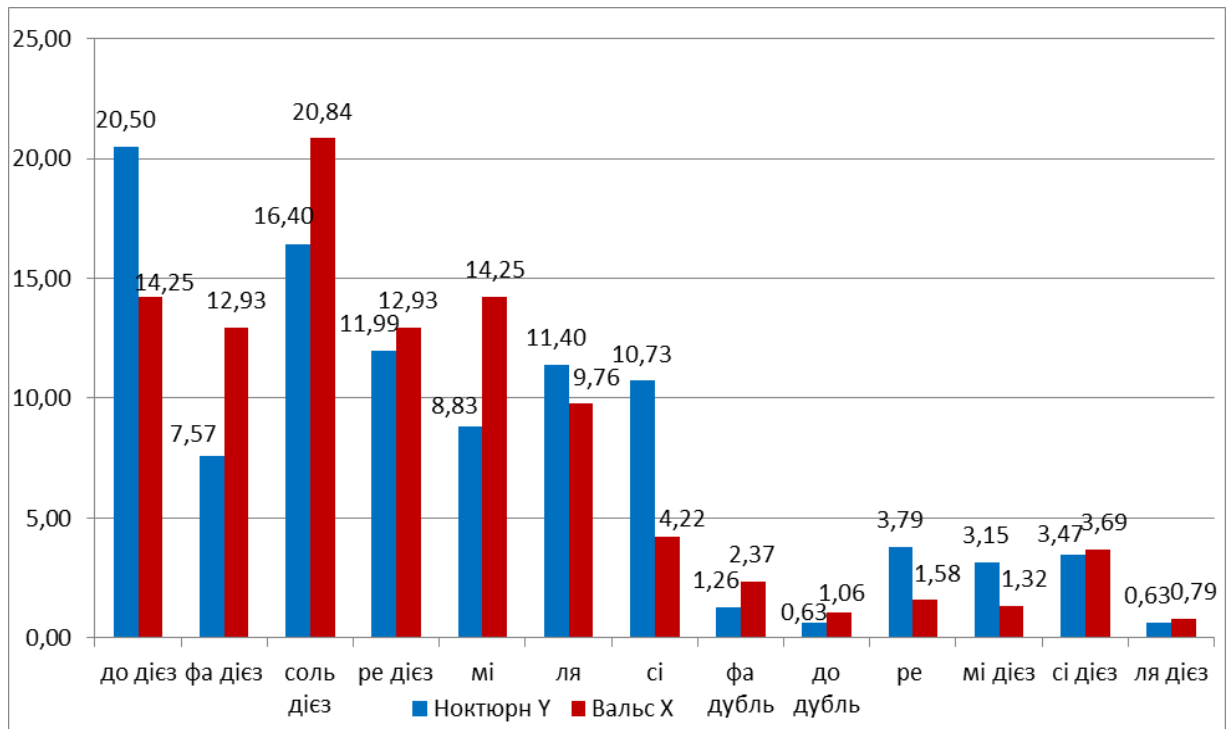


Рис. 2. Частоти зустрічі нот у творах Ноктюрн і Вальс

Далі перейдемо до встановлення тісноти зв'язку між частотою зустрічі нот. Для розрахунку числових характеристик та коефіцієнту кореляції будемо використовувати наступні формули [2,3].

Середня величина X	Середня величина Y
--------------------	--------------------

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$
Дисперсія X	Дисперсія Y
$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$	$D_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - (\bar{y})^2$
Середнє квадратичне відхилення X	Середнє квадратичне відхилення Y
$\sigma_x = \sqrt{D_x}$	$\sigma_y = \sqrt{D_y}$
Кореляційний момент	
$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - (\bar{x}\bar{y})$	
Коефіцієнт кореляції	
$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$	

Проміжні розрахунки зручно проводити у наступній таблиці.

**Таблиця 1.** Розрахунок коефіцієнту кореляції між частотами зустрічі нот (у %) у творах Ноктюрн і Вальс

Назва ноти	Ноктюрн Y	Вальс X	Y <sup>2</sup>	X <sup>2</sup>	X*Y
до дієз	20,50	14,25	420,25	203,06	292,13
фа дієз	7,57	12,93	57,30	167,18	97,88
соль дієз	16,40	20,84	268,96	434,31	341,78
ре дієз	11,99	12,93	143,76	167,18	155,03
Мі	8,83	14,25	77,97	203,06	125,83
Ля	11,40	9,76	129,96	95,26	111,26
Сі	10,73	4,22	115,13	17,81	45,28
фа дубль	1,26	2,37	1,59	5,62	2,99
до дубль	0,63	1,06	0,40	1,12	0,67
ре	3,79	1,58	14,36	2,50	5,99
мі дієз	3,15	1,32	9,92	1,74	4,16

сі дієз	3,47	3,69	12,04	13,62	12,80
ля дієз	0,63	0,79	0,40	0,62	0,50

Проаналізуємо числові характеристики для значень  $X$  та  $Y$ , а також коефіцієнт кореляції. Найбільші відмінності у частоті появи нот спостерігаємо для ноти сі (різниця рівна 7%). Також значні відмінності можна помітити для ноти до дієз (6%). По 5% відмінності у частоті мають ноти фа дієз і мі. А відмінності у частоті появи для всіх інших нот або зовсім відсутні, або дуже малі.

**Таблиця 2.** Розрахунок коефіцієнту кореляції між частотами зустрічі нот ( $y$  %) у творах Ноктюрн і Вальс [2, 3]

$Y_{\text{сер}}=$	7,7
$X_{\text{сер}}=$	7,7
$Dy=$	36,7
$Dx=$	41,8
$Sy=$	6,06
$Sx=$	6,47
$K_{xy}=$	32,65
$r_{xy}=$	0,83

Нагадаємо, що у творах ми розглядаємо частоту зустрічі 13 нот. Якби кожна нота зустрічалася однаково кількість раз, то частота зустрічі кожної ноти була б рівною 7,7%. Середні квадратичні відхилення відносно середнього для обох творів приблизно однакові і рівні 6,06 та 6,47. Це означає, що нерівномірність розподілу частот по нотах в обох творах приблизно однакова. Найбільша частота появи ноти до дієз у творі Ноктюрн рівна 20,5%, а найбільша частота появи ноти соль дієз у Вальсі рівна 20,84%. Тобто найбільші показники частот приблизно співпадають. Аналогічно і найменші показники. У творі Ноктюрн найменший показник частоти 0,63%, а у творі Вальс 0,79%. Кореляційний момент додатній і рівний 32,65. Це означає, що між частотними показниками обох творів існує прямий тісний зв'язок. Для встановлення тісноти

цього зв'язку ми порахували коефіцієнт кореляції. Він рівний 0,83, що говорить про тісний зв'язок між частотними показниками творів.

**Інтервали.** Інтервал - це відстань між двома звуками. Відстань між звуками в музиці вимірюється півтонами. Півтон - це найкоротша відстань між двома звуками, тобто, два сусідні звуки. Тон = 2 півтона.

**Таблиця. 3.** Розміри інтервалів до октави [1]

Прима (ч1)	0 тонів
Мала секунда (м2)	0,5 тона
Велика секунда (в2)	1 тон
Мала терція (м3)	1,5 тона
Велика терція (в3)	2 тона
Кварта (ч4)	2,5 тона
Тритон (збільшена кварта (зб4) або зменшена квінта (зм5))	3 тона
Квінта (ч5)	3,5 тона
Мала секста (м6)	4 тона
Велика секста (в6)	4,5 тона
Мала септима (м7)	5 тонів
Велика септима (в7)	5,5 тонів
Октава (ч8)	6 тонів

Аналогічно зобразимо на прикладі першої строчки твору Ноктюрн №20 принцип підрахунку частоти кожного інтервалу.

CD Sheet Music

### Nocturne in C-sharp Minor

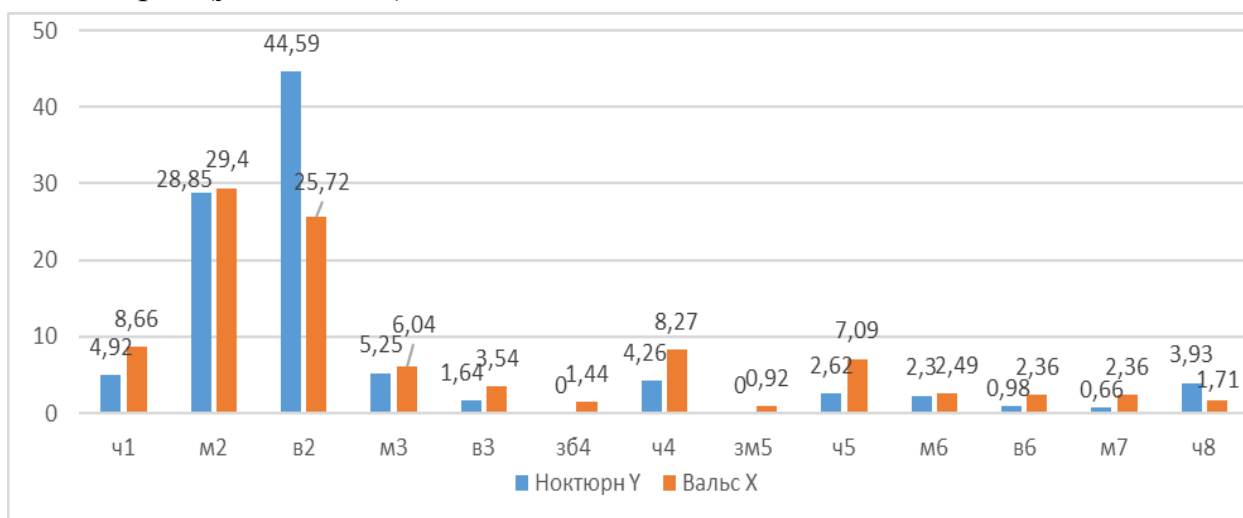
Op. posthumous (1830)

Lento

The musical score shows the first two staves of the piece. Above the notes, intervals are marked with purple brackets and labels: B2, B2, M2, M2, M2, Ч4, B2, B2, M2, M2, M2. The tempo is marked 'Lento' and dynamics include 'p' and 'pp'.

**Рис. 3.** Зразок збору статистичних даних по частоті зустрічі інтервалів

На графіку візуально проаналізуємо відмінності у частоті зустрічі інтервалів у двох творах (у відсотках).



**Рис. 4.** Частоти зустрічі інтервалів у творах Ноктюрн та Вальс

Найбільші відмінності у частоті появи інтервалів нот спостерігаємо для інтервалу велика секунда (різниця рівна 18,87%). Найменші відмінності у частоті зустрічі мають інтервали мала секста (0,2%), мала секунда (0,54%), мала терція (0,79%), зменшена квінта (0,92%). А відмінності у частоті появи для всіх інших дуже малі (менше 5%).

**Таблиця 4.** Розрахунок коефіцієнту кореляції між частотами зустрічі інтервалів нот (у %) у творах Ноктюрн і Вальс

Xсер	7,69
Yсер	7,69
Dx	78,65
Dy	165,61
Sy=	8,87
Sx=	12,87
Kxy	105,85
rxу=	0,93

Нагадаємо, що у творах ми розглядаємо частоту зустрічі 13 інтервалів. Якби кожен інтервал зустрічався однаково кількість раз, то частота зустрічі кожного інтервалу нот була б рівною 7,69%. Середнє квадратичне відхилення відносно середнього для Вальсу рівне 12,87, а для Ноктюрну – 8,87. Це означає, що

нерівномірність розподілу частот по нотах в обох творах не дуже відрізняється. Найбільша частота появи інтервалу велика секунда у творі Ноктюрн рівна 44,59%, а найбільша частота появи інтервалу мала секунда у Вальсі рівна 29,4%. Тобто найбільші показники частот зустрічі інтервалів значно відрізняються. Найменші показники майже рівні: у творі Ноктюрн найменші показники частоти інтервалів: мала септима 0,66% та велика секста 0,98%, а у творі Вальс зменшена квінта 0,92%. У Ноктюрні інтервали зменшена квінта та збільшена кварта не зустрічаються. Кореляційний момент додатний і рівний 105,85. Це означає, що між частотними показниками обох творів існує зв'язок. Для встановлення тісноти цього зв'язку ми порахували коефіцієнт кореляції. Він рівний 0,93, що говорить про дуже тісний зв'язок між частотними показниками творів.

**Тривалості нот.** Для того, щоб позначити подовження звуку, застосовуються спеціальні знаки – крапка, ліга, фермата.

Знову на прикладі першої строчки твору Ноктюрн №20 продемонструємо принцип підрахунку частоти кожної тривалості ноти.

The image shows a musical score for 'Nocturne in C-sharp Minor, Op. posthumous (1830)'. The score is in 3/4 time and marked 'Lento'. It shows the first six measures of the piece. Annotations in purple indicate note durations: 'четвертна' (quarter) and 'восьма' (eighth). The annotations are as follows:

- Measure 1: Quarter note (четвертна), Eighth note (восьма), Quarter note (четвертна).
- Measure 2: Quarter note (четвертна), Eighth note (восьма), Quarter note (четвертна).
- Measure 3: Quarter note (четвертна), Quarter note (четвертна), Quarter note (четвертна).
- Measure 4: Quarter note (четвертна), Quarter note (четвертна), Quarter note (четвертна).
- Measure 5: Quarter note (четвертна), Eighth note (восьма), Quarter note (четвертна).
- Measure 6: Quarter note (четвертна), Eighth note (восьма), Quarter note (четвертна).

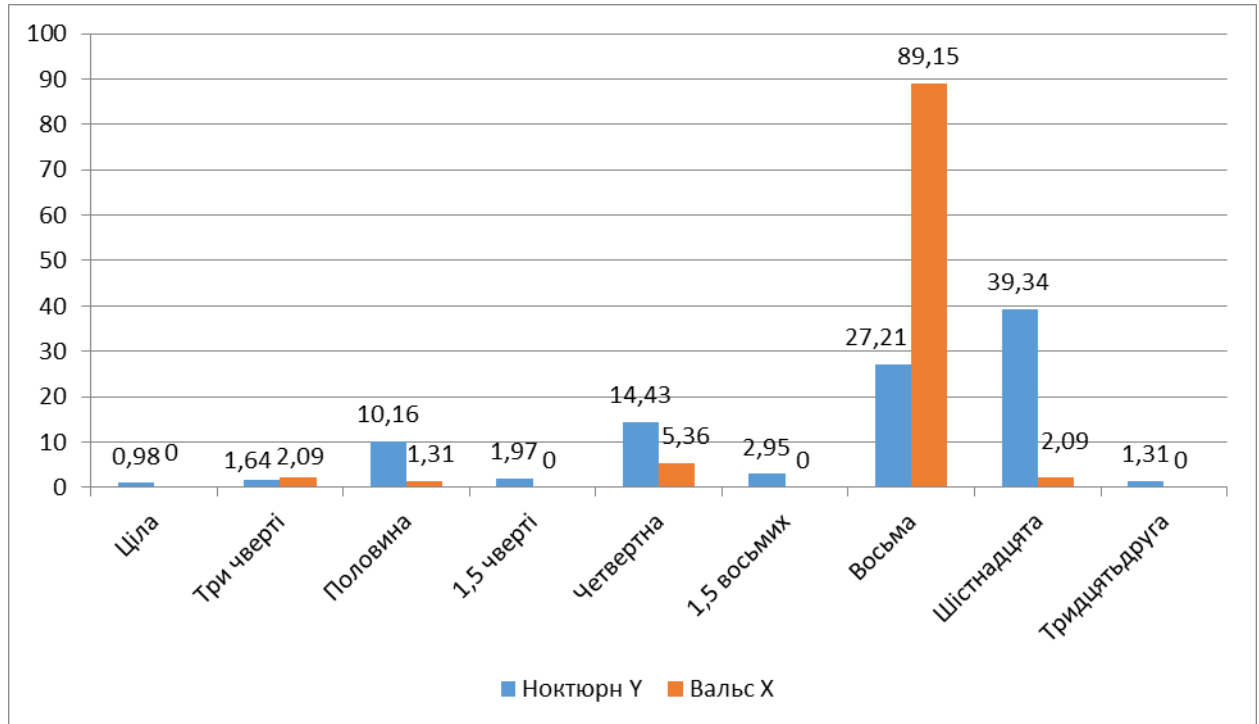
**Рис. 5.** Зразок збору статистичних даних по частоті зустрічі тривалостей нот

Найбільші відмінності у частоті появи тривалостей нот спостерігаємо для тривалості восьма (різниця рівна 61,94%). Значні відмінності можна помітити для тривалості шістнадцята (37,25%). Найменшу відмінність у частоті зустрічі має тривалість три чверті (0,45%). Також дуже малу відмінність має частота



тривалості ціла (0,98%). А відмінності у частоті появи для всіх інших тривалостей малі.

На графіку (рис. 6.) візуально проаналізуємо відмінності у частоті зустрічі кожної тривалості у цих двох творах (у відсотках).



**Рис. 6.** Частоти зустрічі тривалостей нот у творах Ноктюрн та Вальс

Проаналізуємо числові характеристики для значень X та Y, а також коефіцієнт кореляції.

**Таблиця 6.** Розрахунок коефіцієнту кореляції між частотами зустрічі тривалостей нот (у %) у творах Ноктюрн і Вальс

Xсер	11,11
Yсер	11,11
Dx	763,98
Dy	167,39
Sy=	27,64
Sx=	12,94
Kxy	165,67
rxу=	0,46

Нагадаємо, що у творах ми розглядаємо частоту зустрічі 9 тривалостей нот. Якби кожна тривалість зустрічалася однаково кількість раз, то частота зустрічі кожної тривалості ноти була б рівною 11,11%. Середнє квадратичне відхилення відносно середнього для Вальсу рівне 27,64, а для Ноктюрну - 12,94. Це означає, що нерівномірність розподілу частот по нотах в обох творах різна. Найбільша частота появи тривалості шістнадцята у творі Ноктюрн рівна 39,34%, а найбільша частота появи тривалості восьма у Вальсі рівна 89,15%. Тобто найбільші показники частот зустрічі тривалостей значно відрізняються (майже в 2 рази). Найменші показники майже рівні: у творі Ноктюрн найменший показник частоти 0,63%, а у творі Вальс 0,79%.

Кореляційний момент додатній і рівний 165,67. Це означає, що між частотними показниками обох творів існує зв'язок. Для встановлення тісноти цього зв'язку ми порахували коефіцієнт кореляції. Він рівний 0,46, що говорить про зв'язок між частотними показниками творів.

**Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.** У ході дослідження було пораховано та проаналізовано частоти зустрічі нот, тривалостей нот та інтервалів у творах Вальс та Ноктюрн Шопена. Завдяки таблицям та графікам з обрахованими даними був досліджений зв'язок між основними музичними елементами у творах Вальс та Ноктюрн. В результаті дослідження виявлено закономірності у творах Ноктюрн та Вальс Шопена. А саме: коефіцієнт кореляції між частотами зустрічі нот дорівнює **0,83**, між частотами зустрічі тривалостей нот – **0,46**, а між частотами зустрічі інтервалів – **0,93**. Це свідчить про тісний зв'язок між творами та наявність стилю у написанні творів цього композитора.

Надалі планується досліджувати більше творів Ф. Шопена, тобто аналізувати не парний, а багатовимірний розподіл. Можливо, в результаті досліджень стане реальним:

1) відтворити стиль певного композитора, задавши його алгоритмом чи програмою;

2) виявити належність музичного твору тому чи іншому автору, проаналізувавши стиль музичної композиції;

3) перевірити на плагіат та схожість зі стилем певного автора твір.

Зв'язок між такими різними сферами діяльності, як математика та музика, не є достатньо дослідженим, тож це дослідження – перший крок до нових експериментів.

#### **Список використаної літератури**

1. Музична (нотна) грамота. Електронний ресурс:  
[https://panguitar.blogspot.com/2018/02/blog-post\\_22.html](https://panguitar.blogspot.com/2018/02/blog-post_22.html)
2. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник: у 2-х ч. – Ч.ІІ. Математична статистика. – К.:КНЕУ, 2001. – 336с.
3. Економічна енциклопедія: У трьох томах. Т. 1. / Редкол.: ...С. В. Мочерний (відп. ред.) та ін. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2000.-864 с.