УДК 519.8

ЗАСТОСУВАННЯ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖАНА ДЛЯ РОВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Дон Тетяна

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук, доцент Акбаш К. С.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. *У цій статті показано загальну постановку задачі нелінійного програмування, та описано, як можна її розв'язати за допомогою методу множників Лагранжа. Також, коротко описано середовище та метод розробки програми для реалізації задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа.*

Ключові слова: *математична оптимізація, нелінійне програмування, метод множників Лагранжа, візуальне середовище програмування, бібліотека MFC.*

APPLICATION AND SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE LAGGANIZED MULTIPLE METHOD FOR RELATED NONLINEAR PROGRAMMING

Don Tetyana

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Docent Akbash K. S.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

This paper presents a general statement of the problem of nonlinear programming, and describes how it can be solved using the Lagrange multiplier method. Also, a brief description of the environment and the method of developing the program for the realization of the problem of nonlinear programming by the Lagrange factor method.

Key words: mathematical optimization, nonlinear programming, Lagrange multiplier method, visual programming environment, MFC library.

Постановка проблеми. Більшість задач із методів оптимізації та дослідження операцій є складними для їх реалізації на тій чи іншій мові програмування. Причин може бути безліч: не лінійність функцій та систем, складність при виведенні точних коренів, повтор певних операцій до досягнення необхідних результатів, тощо. Не кожна мова програмування здатна до складних математичних операцій, перетворень тощо. Наприклад: мова

Prolog призначена, здебільшого, до логічного програмування та банальних математичних операцій. Тож, у своїй статті ми розглянемо приклад задачі нелінійного програмування та її можливу програмну реалізацію.

Аналіз досліджень і публікацій. Математичною оптимізацією (програмуванням) в математиці, інформатиці та дослідженні операцій називають відбір найкращого елементу (за певним критерієм) з множини доступних альтернатив. У найпростішому випадку задача оптимізації полягає у знаходженні екстремуму (мінімуму або максимуму) дійсної функції шляхом систематичного вибору вхідних значень з дозволеного набору та обчислення значення функції [1]. У цій статті буде розглянуто так окремий випадок математичної оптимізації, як нелінійне програмування. Це допоможе отримати загальне уявлення про сам розділ математичного програмування.

Мета статті: дати характеристику нелінійному програмуванню та застосуванню метода множників Лагранжана для розв'язувати задач нелінійного програмування. Також, ця стаття дасть стислий опис середовищу програмування та реалізацію програми для розв'язування задач методом множників Лагранжана.

Викладення основного матеріалу. Нелінійне програмування — це випадок математичного програмування, у якому цільовою функцією чи обмеженнями є нелінійна функція. У загальному вигляді модель нелінійної задачі має вигляд:

$$Z = f\ x_1, x_2, \dots, x_n\ \ \rightarrow \max\ min$$

за умов

$$q_i\ \ x_1, x_2, \dots, x_n\ \ \ \leq, =, \geq\ \ b_i$$

$$i = 1, m\ ,$$

де $f\ \ x_1, x_2, \dots, x_n$ і $q_i\ \ x_1, x_2, \dots, x_n$ — нелінійні функції [2].

Одним із способів знайти корені нелінійної задачі – розв'язати її за допомогою метода множників Лагранжа. Ідея цього методу полягає в заміні даної задачі на простішу: на знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і має вигляд:

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right) =$$

$$= f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - q_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)\right)$$

де λ_i — не визначені поки що величини, так звані множники Лагранжа.

Знайшовши частинні похідні функції L за всіма змінними і прирівнявши їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

записуємо систему, яка є нелінійною:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1, n}\right) \\ b_i - q_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0 & \left(i = \overline{1, m}\right) \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, знайдемо

$$X^* = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \text{ і } \lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right)$$

— стаціонарні точки. Оскільки їх визначено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум функції.

Отже, для знаходження точок екстремуму в нелінійній задачі (при цьому, функції $f\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ та $g_i\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ мають бути диференційовними) методом множників Лагранжана, можна сформулювати такий алгоритм:

1. Ввести набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ (множники Лагранжа), кількість яких дорівнює кількості рівнянь системи обмежень.
2. Замінити цільову функцію на складнішу, функцію Лагранжа:

$$L\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m\right) =$$

$$= f\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)\right)$$

3. Знайти частинні похідні і прирівняти їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0,\ (j = \overline{1,n});$$

$$b_i - g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0,\ (i = \overline{1,m});$$

4. Знайти розв'язки $X^* = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ і $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$ вище наведенної системи. Ці значення можуть визначати максимум (мінімум) цільової функції або можуть бути сідловими точками
5. Знайти другі часткові похідні функції Лагранжана.
6. Скласти матрицю Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} O & P \\ P' & Q \end{pmatrix};$$

O — матриця розмірності $m \times m$, що складається з нульових елементів;

P — матриця розмірності $m \times n$, елементи якої визначаються наступним чином:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix};$$

P' — транспонована матриця до матриці P розмірності $m \times m$;

Q — матриця розмірності $n \times n$ виду:

$$Q = \left(\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)}{\partial x_I \partial x_I} \right),\ (i = \overline{1,m}; J = \overline{1,n});$$

7. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.
8. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, знак наступних $(n-m)$ головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^{m}$ [3].

Розглянемо таку задачу:

Знайти всі екстремуми функції f на множинні Ω у випадку:

$$f\ \ x, y, z\ \ = xyz$$

$$\Omega: x + y + z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Запишемо цю задачу в стандартному вигляді:

$$\begin{gathered} xyz \ \rightarrow\ extr, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{gathered}$$

Складаємо функцію Лагранжа:

$$L\ \ x, y, z, \lambda\ \ = xyz + \lambda_1\ \ x + y + z\ \ + \lambda_2\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 1\ \ .$$

Знайшовши частинні похідні функції, маємо таку систему:

$$\begin{gathered} yz + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ xz + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0, \\ xy + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{gathered}$$

Розв'язки системи такі:

$$\begin{array}{lll} \lambda_2 = -0{,}204124 & \lambda_2 = -0{,}204124 & \lambda_2 = -0{,}204124 \\ \lambda_1 = 0{,}166667 & \lambda_1 = 0{,}166667 & \lambda_1 = 0{,}166667 \\ x_1 = 0{,}816497 & x_2 = -0{,}408248 & x_3 = -0{,}408248 \\ y_1 = -0{,}408248 & y_2 = 0{,}816497 & y_3 = -0{,}408248 \\ z_1 = -0{,}408248 & z_2 = -0{,}408248 & z_3 = 0{,}816497 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_2 = -0{,}204124 & \lambda_2 = -0{,}204124 & \lambda_2 = -0{,}204124 \\ \lambda_1 = 0{,}166667 & \lambda_1 = 0{,}166667 & \lambda_1 = 0{,}166667 \\ x_4 = -0{,}816497 & x_5 = 0{,}408248 & x_6 = 0{,}408248 \\ y_4 = 0{,}408248 & y_5 = -0{,}816497 & y_6 = 0{,}408248 \\ z_4 = 0{,}408248 & z_5 = 0{,}408248 & z_6 = 0{,}816497 \end{array}$$

Матриці Гессе, які складаються з других часткових похідних:

$$H = \begin{array}{cccc} 0 & 2x & 2y & 2z \\ \hdashline 2x & 2\lambda_2 & z & y \\ 2y & z & 2\lambda_2 & x \\ 2z & y & x & 2\lambda_2 \end{array}$$

$$H\ \ 0{,}816497;\ -0{,}408248;\ -0{,}408248;\ -0{,}204124\ \ =$$

$$= \begin{matrix} 0 & 1{,}632994 & -0{,}816496 & -0{,}816496 \\ \hdashline 1{,}632994 & -0{,}408248 & -0{,}408248 & -0{,}408248 \\ -0{,}816496 & -0{,}408248 & -0{,}408248 & 0{,}816497 \\ -0{,}816496 & -0{,}408248 & 0{,}816497 & -0{,}408248 \end{matrix}$$

m = 2.

Головні мінори починаючи з 3-го порядку (m + 1 = 2 + 1 = 3):

$$\Delta_3 = \begin{matrix} 0 & 1{,}632994 & -0{,}816496 \\ 1{,}632994 & -0{,}408248 & -0{,}408248 \\ -0{,}816496 & -0{,}408248 & -0{,}408248 \end{matrix} = 2{,}721671234 \cdot 10^5 \quad +$$

$$\Delta_4 = \begin{matrix} 0 & 1{,}632994 & -0{,}816496 & -0{,}816496 \\ 1{,}632994 & -0{,}408248 & -0{,}408248 & -0{,}408248 \\ -0{,}816496 & -0{,}408248 & -0{,}408248 & 0{,}816497 \\ -0{,}816496 & -0{,}408248 & 0{,}816497 & -0{,}408248 \end{matrix} =$$

$$= -6{,}666666470 \cdot 10^5 \quad -$$

Так – як, $-1^{\ m+1} = \ -1^{\ 2}$, то

$0{,}816497;\ -0{,}408248;\ -0{,}408248$ – є точкою максимуму.

Аналогічні обчислення робимо для всіх інших точок.

Знаходимо значення цільової функції в точці $0{,}816497;\ -0{,}408248;\ -0{,}408248$:

$\max f\ \ x = 0{,}816497;\ y = -0{,}408248;\ z = -0{,}408248\ \ = xyz = 0{,}816497 \cdot$
$\cdot\ -0{,}408248\ \cdot\ -0{,}408248\ = 0{,}13608263969$

Продовжуємо такі ж обчислення для всіх наступних 5-ти точок

Отже, цільова функція має мінімальне значення в точках:

- $-0{,}816497;\ 0{,}408248;\ 0{,}408248$;
- $-0{,}408248;\ 0{,}816497;\ -0{,}408248$;

а максимальне в точках:

- $0{,}816497;\ -0{,}408248;\ -0{,}408248$;
- $0{,}408248; -0{,}816497; 0{,}408248$;
- $-0{,}408248;\ -0{,}408248;\ 0{,}816497$;
- $0{,}408248;\ 0{,}408248;\ 0{,}816497$.

Тепер, розберемо одне із середовищ програмування в якому можна реалізувати розв'язання нелінійної задачі методом множників Лагранжа.

Візуальне середовище програмування – це інтегроване середовище розробки програмних засобів і яке дає змогу конструювати програми шляхом різних оперцій над графічними об'єктами. Візуальне середовище має:

- редактор вихідного коду;
- компілятор або інтерпретатор;
- засоби автоматизації збірки;
- засоби для спрощення розробки графічного інтерфейсу користувача [4].

Одним із таких середовищ – є Microsoft Visual Studio. Це серія продуктів компанії Microsoft, які включають інтегроване середовище розробки програмного забезпечення та ряд інших інструментальних засобів.
Завдяки Microsoft Visual Studio можна розробляти як консольні програми, так і програми з графічним інтерфейсом, в тому числі з підтримкою технології Windows Forms, а також веб-сайти, веб-застосунки та веб-служби.

Visual Studio включає один або декілька з наступних компонентів:

- ✓ Visual Basic .NET, а до його появи — Visual Basic;
- ✓ Visual C++;
- ✓ Visual C#;
- ✓ Visual F# (входить до складу Visual Studio 2010);
- ✓ Visual Studio Debugger.

Багато варіантів постачання також включають:

- ✓ Microsoft SQL Server;
- ✓ MSDE Visual Source Safe — файл-серверна система управління версіями [5].

Інструменти в Microsoft Visual Studio зображенні на Рис.1.
Також, розглянемо одну із бібліотек, яку можна використовувати в Microsoft Visual Studio. MFC(Microsoft Foundation Classes) – це бібліотека, яка дає можливість розробляти GUI–застосунки для Microsoft Windows на мові C++, з

використанням багатого набору бібліотечних класів. Велика частина MFC є відносно тонким об'єктно-орієнтованим шаром над Windows API. Це, з одного боку, підвищує продуктивність, а з другого, успадковує всі недоліки дизайну Windows API і перешкоджає перенесенню програм на інші платформи [6].

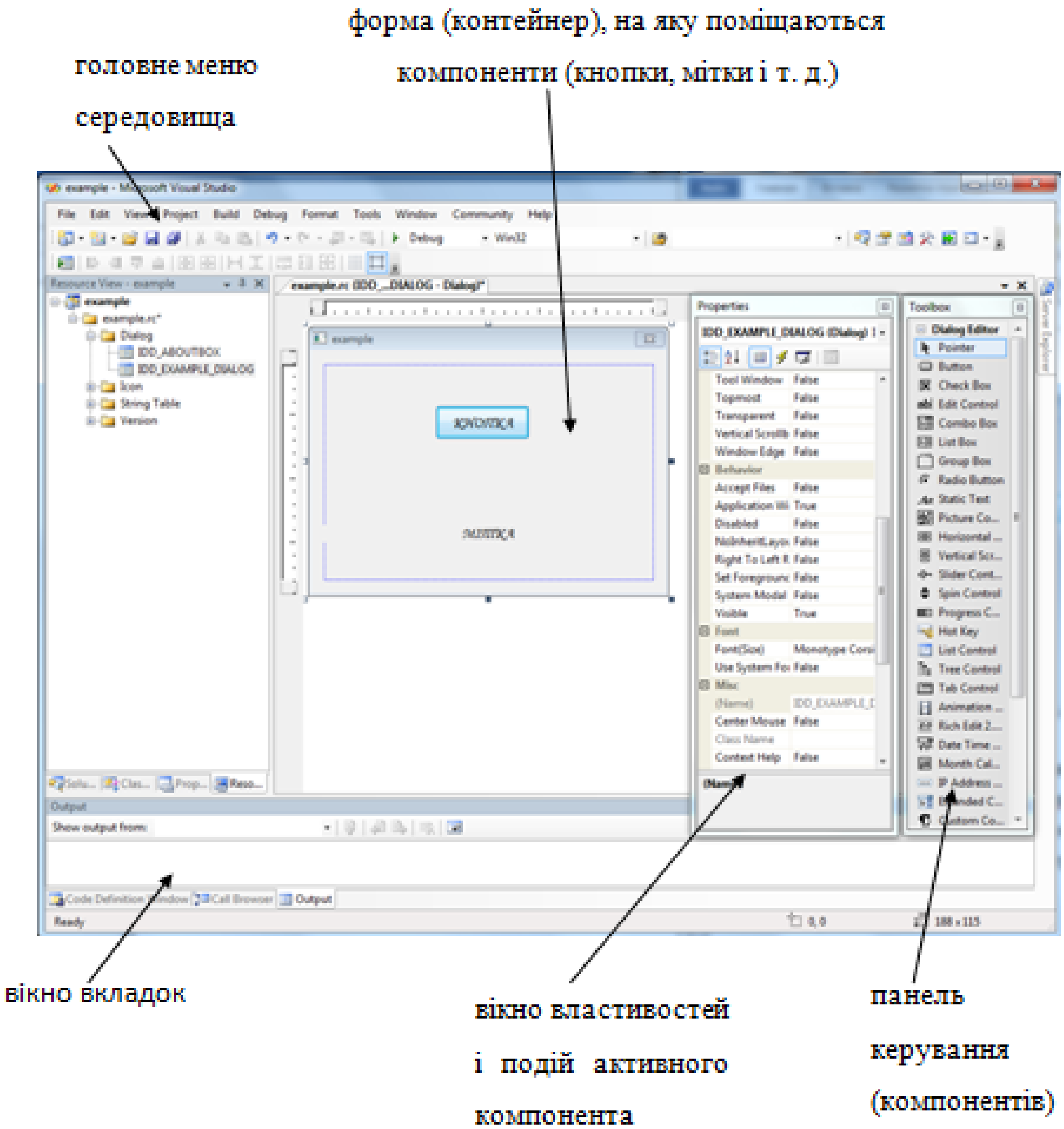

Рис.1. Області середовища

І розглянемо короткий алгоритм створення програми для розв'язання задач методом множників Лагранжана.

I. Створити проект у Microsoft Visual Studio під назвою Metodi_mnojnikiv_Lagranjana.

II. Спроектувати дизайн для 9-и вікон, задавши необхідні властивості для самого діалогу та для елементів List Box, Radio Button, Edit control. Group box, Button і Static Text.
III. Задати для List Box, Radio Button та Edit control імена змінних – членів у вікні Майстра класів.
IV. Підключити до головного вікна програми меню та інші діалогові вікна, створивши для кожного вікна, починаючи з 2-го, свій клас: CMOne, CMTwo, CVI, CVII, CVIII, VIV, CVV та CDovidka.
V. Написати потрібний код для всіх кнопок та функцій.

Результат роботи одного з вікон програми, показано на Рис.2:

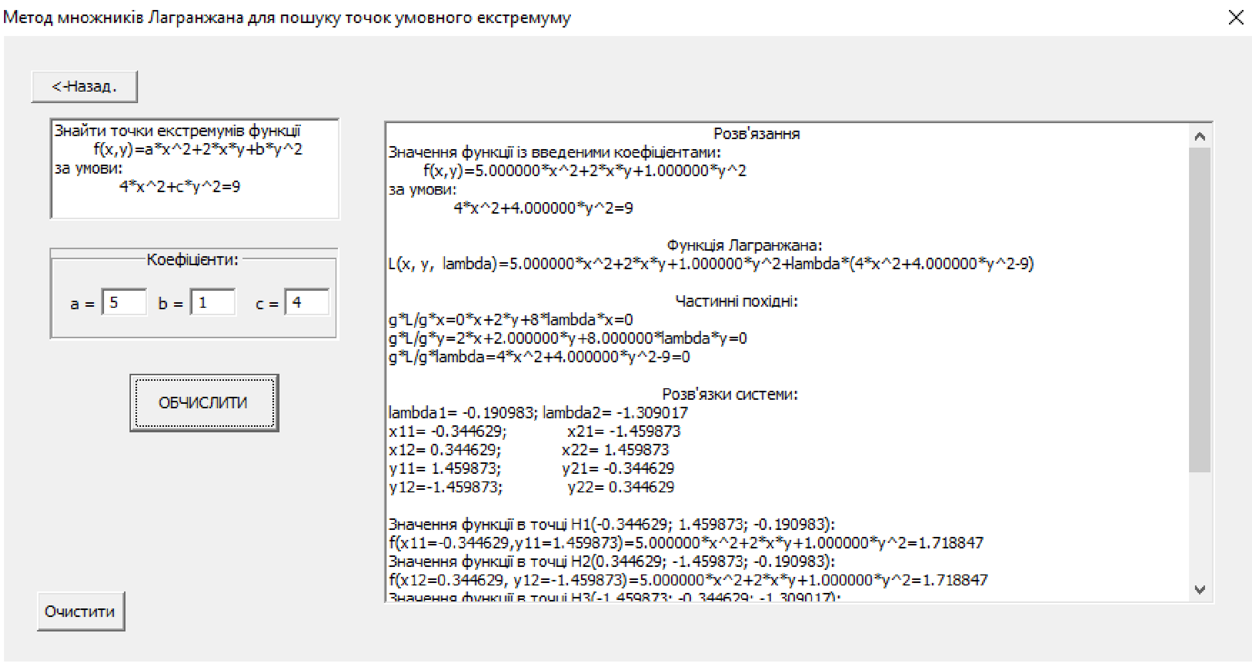

Рис.2. Вікно програми для розв’язування нелінійних задач методом множників Лагранжа на находження точок умовного екстремуму

Висновки. Розв’язування нелінійних задач – є важливою темою в математичному програмуванні. У цій статті було розглянуто лише частковий випадок із всього розділу математики. Не менш важливим є, також, елементарні знання про способи програмної реалізації нелінійної задачі, як це було показано на прикладі методу множників Лагранжа. Тож, наведений приклад задачі та її програмної реалізації допоможе, мабуть, кожному студенту краще зрозуміти та освоїти теми, як математичне, так і візуальне програмування.

Список використаних джерел

1. [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)

2. [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BB%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F

3. [Електронний ресурс] – режим доступу: http://www.mathros.net.ua/metod-mnozhnykiv-lagranzha.html

4. [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%96%D0%B7%D1%83%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B5_%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F

5. [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio