УДК 51.512

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗСО

Коструб Юлія

Науковий керівник: канд.пед. наук, доцент Сердюк З.О.

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна

У статті проілюстровано методи розв'язування найпростіших рівнянь з параметрами під час навчання математики в закладах середньої освіти, зокрема лінійних та квадратних рівнянь з параметрами, і рівнянь що розв'язуються за допомогою найпростіших рівнянь. Досліджено ефективність подання навчального матеріалу на уроках, для покращення його засвоєння учнями запропоновано актуальні методи у вигляді зручних схем. Детально розглянуто приклади в яких використано дані методи, а також подані покрокові алгоритми розв'язування рівнянь з параметрами різними способами.

***Ключові слова**: параметр, лінійні рівняння, квадратні рівняння.*

Methodical specifics of solving equations with parameters during mathematics teaching in secondary education institutions

Y. Kostrub

Scientific supervisor: PhD (Pedagogical Sciences), Assistant Professor Serdiuk Z.

Bogdan Khmelnitsky Cherkasy National University, Cherkasy, Ukraine

The article illustrates the methods of solving the simplest equations with parameters during the study of mathematics in secondary education institutions, in particular linear and square equations with parameters, and equations solved with the help of simplest equations. Effectiveness of presentation of educational material at the lessons has been explored. Actual methods in the form of convenient schemes are proposed for students to improve its assimilation. Examples in which these methods are used are considered in detail, as well as the step-by-step algorithms for solving equations with parameters in different ways are presented.Key words: parameter, linear equations, square equations.

***Key words**: parameter, linear equations, square equations.*

Постановка проблеми. Математичні вправи з параметром є одними із найскладніших для розв'язування в курсі елементарної математики. Вміння їх розв'язувати цілком справедливо вважається показником високого рівня математичної компетентності учнів, оскільки демонструють гарне засвоєння ними теоретичних відомостей з математики та вміле застосування знань на практиці у нестандартних ситуаціях. Розв'язування задач з параметрами викликає великі труднощі в учнів, оскільки їх вивчення не є окремою складовою шкільного курсу математики, і розглядається тільки на факультативних заняттях чи гуртках. Задачі з параметрами відіграють важливу роль у формуванні логічного мислення й математичної культури в школярів, але у більшості учнів загальноосвітніх шкіл, крім тих, що навчаються в класах з поглибленим вивченням математики, виникають труднощі під час підготовки та написання ЗНО. Це пов'язане з тим, що кожне рівняння з параметрами являє собою цілий клас звичайних рівнянь, для кожного з яких повинен бути отриманий розв'язок. Але оскільки шкільна програма не передбачає набуття стійких навичок розв'язання таких рівнянь учнями, тому ці питання доцільно розглядати на факультативних заняттях.

Аналіз досліджень і публікацій. Питаннями особливостей розв'язування рівнянь з параметрами займалися В.Г. Бевз, М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова, та ін.

Мета статті – розглянути методичні особливості розв'язування рівнянь з параметрами під час навчання математики в ЗСО, дати означення поняттю «рівняння з параметрами», описати види рівнянь.

Для розв'язування рівнянь з параметрами не потрібно спеціальних знань, що виходять за межі шкільної програми. Проте необхідність у проведенні досліджень значно ускладнює розв'язування завдань цього типу [1, 4]. Природно, такий невеликий клас задач багатьом не дозволяє засвоїти головне: параметр, будучи фіксованим, але невідомим числом, має певну двоїсту природу. По-перше, учні часто «спілкуються» з параметром як із числом, а по-друге, – ступінь волі спілкування обмежується його невідомістю. Так, ділення на вираз, що містить параметр, добування кореня парного степеня з подібних виразів вимагають попередніх досліджень. Як правило, результати цих досліджень впливають і на розв'язування, і на відповідь.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Основне, що потрібно засвоїти при першому знайомстві з параметром, – це необхідність обережного поводження з фіксованим, але невідомим числом.

Отже, дамо означення параметра і рівнянь з параметром.

Означення 1. Змінні, які під час розв’язування рівняння вважають сталими, називають параметрами, а саме рівняння називається рівнянням з параметрами [1, 4].

Означення 2. Розв’язати рівняння з параметрами – це означає вказати при яких значеннях параметрів існують розв’язки і які вони.[1, 4]

Рівняння $f(x;a)=0$ можна вважати коротким записом множини рівнянь, які одержують з даного при різних конкретних значеннях параметра a. При розв’язанні намагаються виділити «особливі» значення параметра (їх називають контрольними), в яких або при переході через які відбувається якісна зміна рівняння [1, 4].

Розглянемо способи розв’язування рівнянь з параметрами:

1) розв’язування рівняння для будь-якого значення параметра;
2) знаходження значень параметра, при яких рівняння має розв’язки;
3) знаходження значень параметра, при яких рівняння має вказану кількість розв’язків;
4) знаходження значень параметра, при яких розв’язки рівняння задовольняють вказану умову [1, 4].

Методи розв’язування:

1) аналітичний;
2) графічний.

При розв’язуванні рівнянь аналітичним способом можна сформулювати деякі загальні положення, дотримання яких дає певні орієнтири в процесі досліджень. А саме:

1) встановлюють ОДЗ змінної та ОДЗ параметрів.
2) виражають змінну через параметри;

3) для кожного допустимого значення параметра знаходять множину всіх коренів даного рівняння. Якщо параметрів кілька, то множину коренів шукають, звичайно, для певного співвідношення між параметрами;

4) досліджують особливі значення параметра, при яких корені рівняння існують, але не виражаються формулами, які отримали [1, 5].

Розв'язувати рівняння з параметрами графічним способом зручно за таким алгоритмом:

1) знаходимо область допустимих значень рівняння;
2) виражаємо a як функцію від x;
3) у прямокутній системі координат будуємо графік функції $a = f(x)$ для тих значень x, які входять в область допустимих значень даного рівняння;
4) знаходимо точки перетину прямої $a = c$, де $c = (-\infty; +\infty)$ з графіком функції $a = f(x)$. Якщо пряма $a = c$ перетинає графік $a = f(x)$, то знаходимо абсциси точок перетину. Для цього досить розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x.
5) записуємо відповідь [1, 5].

Зазвичай у більшості учнів виникають труднощі у розв'язанні параметричного рівняння. Для покращення засвоєння учнями навчального матеріалу можна запропонувати їм візуалізувати розв'язування рівняння за допомогою алгоритму. Даний алгоритм зручно буде подати у вигляді схеми.

Означення 3. Рівняння вигляду $ax + b = 0$, де a і b – деякі вирази, що залежать лише від параметрів, x - невідома змінна, називається лінійним рівнянням з параметрами [1, 5].

Це рівняння зводиться до вигляду $ax = -b$ і має наступні розв'язки:

1) при $a \neq 0$ має єдиний розв'язок $x = -\frac{b}{a}$, при кожній допустимій системі значень параметрів;
2) при $a = 0$ і $b = 0$ розв'язком рівняння є будь-яке число;
3) при $a = 0$, $b \neq 0$ рівняння розв'язків не має [1, 5].

Також учням можна запропонувати використовувати рис.1 *Алгоритм розв'язування лінійного рівняння*, на якому зручно та лаконічно поданий алгоритм дій при розв'язуванні.

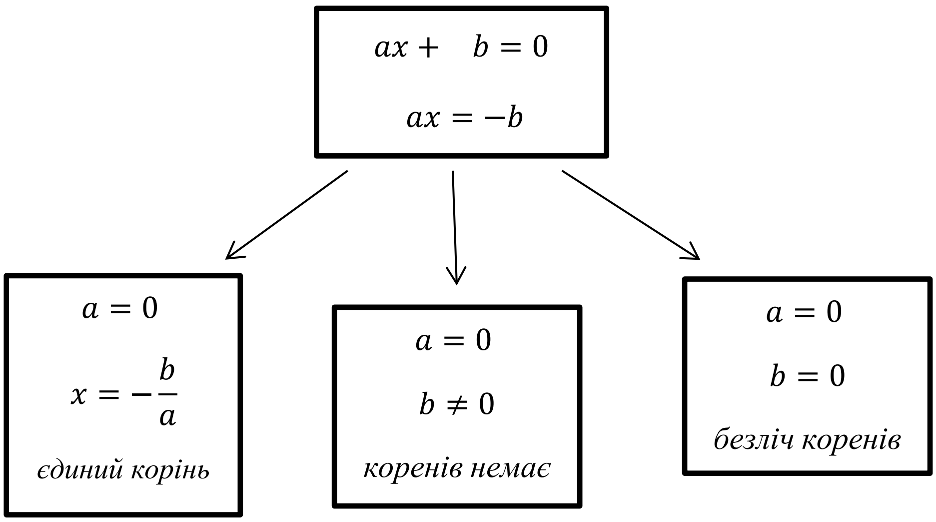


Рис.1 *Алгоритм розв'язування лінійного рівняння*

Подана вище схема допоможе учням краще орієнтуватися в покроковому розв'язанні найпростіших лінійних рівнянь з параметрами. Її також можна використовувати для розв'язування інших складніших лінійних рівнянь.

Перед розв'язуванням рівнянь з учнями доцільно повторити теоретичний матеріал який може знадобитися їм у ході розв'язування. У випадку даного типу рівнянь важливо буде повторити елементарні перетворення виразів, формули скороченого множення тощо.

Далі розглянемо декілька прикладів лінійних рівнянь з параметрами та особливості їх розв'язання.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $a^2x + 1 = a + x$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді:

$$a^2x + x = a - 1\,;$$

Легко бачити, що можна винести спільний множник за дужки. Виконаємо дане перетворення:

$$x\,(a^2 - 1) = a - 1\,;$$

Використаємо формули скороченого множення:

$$x\,(a-1)\,(a+1) = a-1.$$

Дане рівняння поділяється на частинні випадки, кожний з яких ми можемо легко розв'язати. Розглянемо їх на рис.2 *Частині випадки до прикладу 1*.

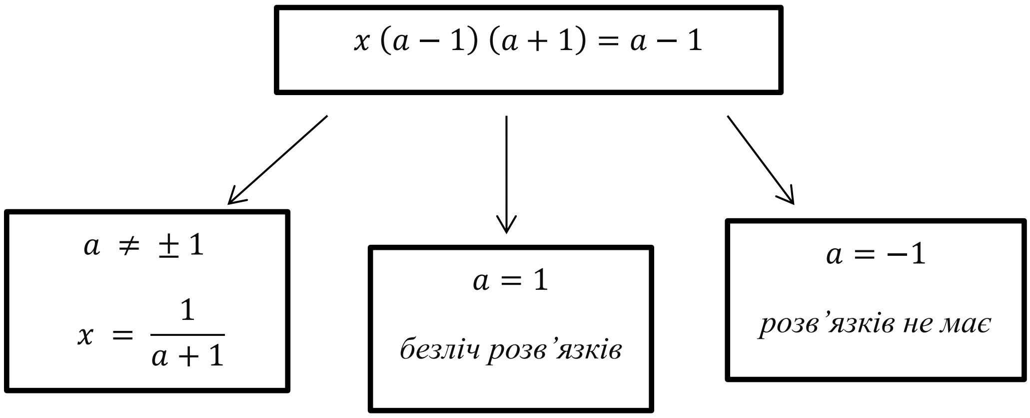


Рис.2 *Частині випадки до прикладу 1*

1) Якщо $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a+1}$.

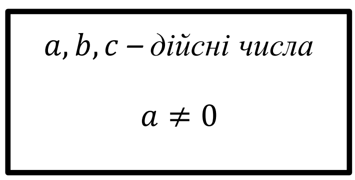
2) Якщо $a = 1$, то рівняння має безліч розв'язків.

3) Якщо $a = -1$ з рівняння отримуємо рівність $0 = -2$, яка неправильна, тобто рівняння розв'язків не має.

Відповідь: якщо $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{x-1}$; якщо $a = 1$, то рівняння має безліч розв'язків; якщо $a = -1$, то рівняння розв'язків не має [3, 24]

Означення 4. Рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – невідома змінна, a, b, c – вирази, що залежать тільки від параметрів і $a \neq 0$, називається квадратним рівнянням з параметрами [1, 9].

Допустимими будемо вважати тільки ті значення параметрів, при яких $a, b,\ c$ – дійсні числа. У зв'язку з необхідністю виконання умови $a \neq 0$ в квадратних рівняннях доводиться розбивати розв'язування на декілька етапів вже на першому кроці. Тобто, для випадків коли: а) $D = 0$; б) $D < 0$; в) $D > 0$. [1, 9]. Розглянемо Рис.2 Алгоритм розв'язування квадратного рівняння.



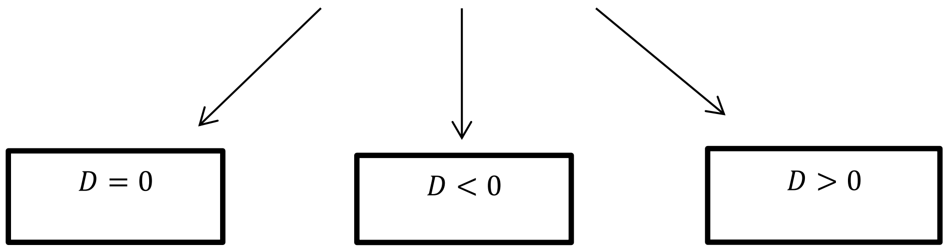


Рис. 3 *Алгоритм розв'язуваня квадратного рівняння*

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $(a+1)\,x^2 + 2ax + a - 2 = 0$.

Розв'язання.

1) Якщо $a + 1 = 0$ тобто $a = -1$, то задане рівняння буде мати вигляд: $-2x - 3 = 0$, тобто $x = -\frac{3}{2}$.

2) Якщо $a + 1 \neq 0$ $(a \neq -1)$, то одержимо квадратне рівняння, дискримінант якого $\mathrm{D} = 4\,(a+2)$. Далі розглянемо три випадки:

а) якщо $D = 0$, тобто $4\,(a+2)$, то $a = -2, x = -2$;

б) якщо $a = -2,\ x = -2$, тобто $4\,(a+2) < 0, (a < -2),$ то коренів немає;

в) якщо $D > 0{:}\ 4(a+2) > 0,\ a > -2$ і $a \neq -1$, тобто

$-2 < a < -1$, то квадратне рівняння має два різні корені:

$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a+2}}{a+1}$; $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a+2}}{a+1}$.

Розглянемо розв'язання у вигляді схеми на рис.4 *Частинні випадки до прикладу 2.*

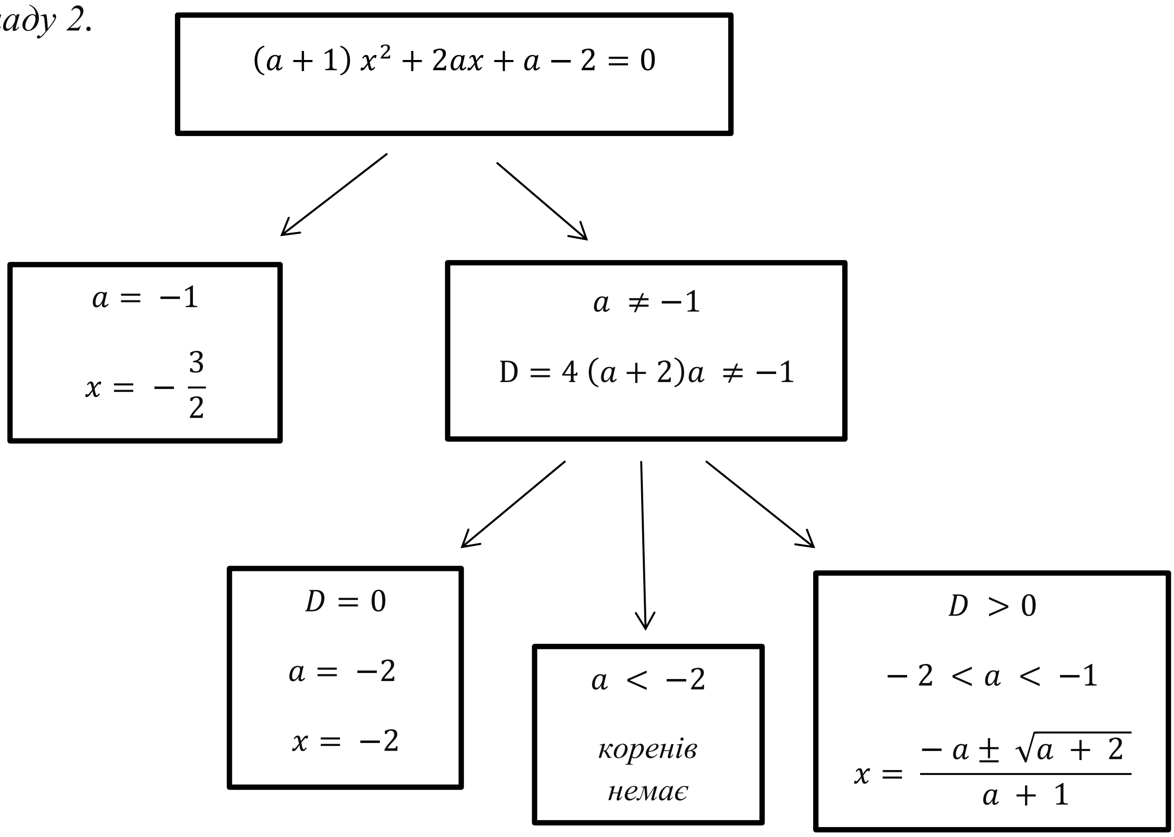


Рис.4 *Частинні випадки до прикладу 2*

Відповідь: якщо $a = -1$, то $x = -\frac{3}{2}$; якщо $a \neq -1$ і $a \geq -2$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a+2}}{a+1}$ [3, 36].

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Рівняння з параметрами виступають як об'єкти досліджень більш загального характеру, ніж звичайні рівняння, які складають методичну основу шкільного курсу математики. Будь-яке рівняння з параметрами, з одного боку, є рівнянням з кількома незалежними змінними, а з іншого – нескінченною сукупністю частинних рівнянь. Знаходження розв'язку рівнянь з параметрами означає розв'язування кожного з частинних рівнянь, а отже застосування умінь учня в повному обсязі.

Розв'язування задач з параметрами потребує особливої ретельності та глибини аналізу. При цьому слід правильно вирішити три основні проблеми:

1) особливе правило запису відповіді задач з параметрами;

2) врахування області допустимих значень;

3) врахування області застосування формули.

Кожна задача з параметром повинна бути пов'язана з основним, базовим підручником. Навіть найпростіші приклади можуть слугувати матеріалом для такого дослідження, оскільки розв'язування задач з параметрами потребує ґрунтовних і міцних знань з математики, достатній рівень володіння своїми знаннями та вміння їх застосовувати.

Список використаної літератури:

1. Андрусяк К.П. Готуємося до зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Рівняння з параметрами: навчальний посібник / К.П. Андрусяк, С.Т. Захарків, О.І. Левус, Л.П. Онишкевич, О.М. Пилипів / – Червоноград: Інформаційно-методичний центр освіти, 2008. – 43 с.

2. Доманська І.П. Рівняння з параметрами: Методичні рекомендації: навчальний посібник / І.П. Доманська, Г.В. Зеліско, Л.Л. Стахів / - Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005. – 123 с.

3. Цегелик Г.Г. Збірник типових конкурсних тестових завданьз математики: навчальний посібник / Г.Г. Цегелик / - Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005. – 140с.

4. Горнштейн П.І. Задачі з параметрами: навчальний посібник / П.І. Горнштейн, В.Б. Полонський, М.С. Якір / - Київ: РІА «Текст»; МП «ОКО», 1992. – 290 с.