УДК 37.016:51

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Тібекіна Катерина

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті проілюстровано задачі, що приводять до поняття похідної, застосування похідної до наближеного обчислення значень елементарних функцій, показано наближені обчислення значень функції, наведено приклади задач і вправ, що розвивають навички роботи з наближеними числами та величинами, розв'язано задачі прикладного змісту, які передбачають виконання дій над наближеними значеннями чисел та величин.

Ключові слова: *границя функції, приріст аргументу, приріст функції, похідна, диференціювання, точки екстремуму, найбільше та найменше значення функції.*

Methodology for studying the topic «derivative and its application» in old school

Tibekina Katerina

Scientific supervisor: candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of mathematics department Izyumchenko L.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article illustrates the problems that lead to the concept of derivative, the application of the derivative to the approximate calculation of the values of elementary functions, approximate approximations function values of the function are shown, examples of problems and exercises developing skills of work with approximate numbers and values are solved, problems of content applied, which anticipate action on approximate values of numbers and quantities.

Keywords: *boundary of function, increase the argument, increment of function, derivative, differentiation, extreme points, the largest and the smallest value of the function.*

Постановка проблеми. Сучасні фахівці мають добре володіти математичним апаратом, який має надзвичайне значення для розвитку сучасної фізики, економіки, бізнесу. Фундаментом математики служить математичний аналіз, основою якого є взаємопов'язані за змістом розділи – диференціальне та інтегральне числення. Похідна – це одне з важливих понять в математиці. Як казав голландський фізик Гюйгенс: «Без інтегрального і диференціального числення математика, як наука, не змогла би досягнути свого досконалого розвитку».

Аналіз досліджень і публікацій. У даний період часу викладання математики не спрямоване на зв'язок останньої з іншими науками. У старших класах в повній формі не використовуються знання, уміння та навички учнів при розв'язуванні ними завдань практичного змісту, оскільки учні не бачать зв'язку з іншими предметами, не розуміють, навіщо їм потрібно вивчати математику.

Мета статті: показати геометричний та механічний зміст похідної, розглянути схему дослідження функції, застосувати похідну для дослідження функції та побудови графіка.

Виклад основного матеріалу. Похідну введено майже одночасно з поняттям функції, хоча матеріали, які підводили до цих понять, накопичувалися протягом багатьох століть. Ще Архімед розв'язував задачі про дотичні до спіралей і про визначення найбільших значень виразів, які тепер розв'язують за допомогою похідної. Ввели це поняття незалежно один від одного та йдучи різними шляхами – в Англії І. Ньютон, а в Німеччині Г. Лейбніц. Ньютон виходив з потреб фізики та розглядав похідну як швидкість, а Лейбніц під похідною розумів кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції. Частіше він користувався диференціалами dx і dy – нескінченно малими приростами аргументу і функції. У його позначеннях похідна дорівнює відношенню $\frac{dy}{dx}$ [1, 97]. Розглянемо ці два випадки.

1. Задача про миттєву швидкість [2, 47]

Нехай автомобіль, рухаючись автомобільною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях у 120 км. Тоді його середня швидкість руху дорівнює $v_{\text{сер}} = \frac{120}{2} = 60$ (км год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших –

повільніше, інколи міг призупинятися. Разом з цим спідометр у будь-який момент часу показував швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти більш повно характеризує рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s(t)$, яка дозволяє визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху** точки.

З курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, де s_0 – координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_0 – початкова швидкість, a – прискорення.

Нехай, наприклад, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тоді $s(t) = t^2 + t$.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в цій точці приріст Δt, тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs, де

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = (t_0 + \Delta t)^2 + ((t_0 + \Delta t) - (t_0^2 + t_0)) = t_0^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t,$$

Тобто $v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t$.

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ наголошує, що при заданому законі руху $y = s(t)$ і фіксованому моменті часу t_0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt.

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$

майже не змінюється. Чим менше Δt, тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0. Іншими словами, якщо при $\Delta t \longrightarrow 0$ значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0.

У прикладі, якщо $\Delta t \longrightarrow 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

2. Задача про дотичну до графіка функції [1, 59]

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку А, в якій існує дотична до графіка (рис.1).

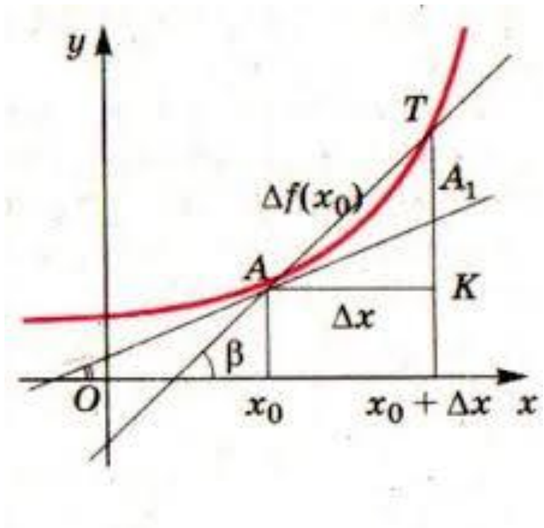

Рис.1

Якщо абсциса точки А дорівнює x_0, то її ордината – $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx. Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка Т з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.

Через точки А і Т проведемо прямі АК і ТК, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій точці К. Тоді АК $= \Delta x$ – приріст аргументу, а ТК $= \Delta$у – приріст функції на $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$.

Кутовий коефіцієнт січної АТ дорівнює тангенсу кута β , тобто відношенню Δу до Δx:

$$tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо приріст аргументу Δx зменшувати так, щоб він прямував до нуля, то січна АТ, повертаючись навколо точки А, наближатиметься до прямої AA_1. Таку пряму AA_1 – граничне положення січної АТ при $\Delta x \longrightarrow 0$ – називають **дотичною до графіка** даної функції в точці x_0.

Якщо $\Delta x \longrightarrow 0$, то міра кута β прямує до α, а тангенс кута β – до $tg\alpha$. Тобто, якщо k – кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \longrightarrow 0$, то

$$k = tg\alpha = \lim_{\beta\to\alpha} tg\beta = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Розв’язавши дві різні задачі, ми дійшли до однієї математичної моделі: границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. До обчислення значення виразу $\lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)}{\Delta x}$ приводять розв’язування багатьох задач з механіки, електрики, економіки, біології, статистики тощо. Саме тому цей вираз отримав спеціальну назву – **похідна**.

Означення [1, 59]. Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції у точці x_0 до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

Похідну функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності:

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)}{\Delta x}, \text{ або } f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Похідна функції в точці − це число. Але коли говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію.

Операцію визначення похідної функції називають диференціюванням.

За допомогою похідної можна досліджувати різні функції. Розглянемо схему дослідження функції:

1) знайти область визначення функції, тобто множину всіх точок для яких існує значення функції;

2) знайти (якщо вони існують) точки перетину графіка з координатними осями. Для цього потрібно у рівняння y=f(x) підставити x=0, а також розв'язати рівняння f(x)=0 для відшукання точок перетину з віссю абсцис Ox;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. У деяких випадках це можна зробити візуально за самим виглядом функції, якщо ні – то:

1. $f(-x) = f(x)$ – функція парна;

2. $f(-x) = -f(x)$ – функція непарна;

3. $f(x+T) = f(x)$ – функція періодична, T– період функції.

Таким чином, якщо маємо парну функцію $y = f(x)$, то достатньо побудувати її для додатних значень $x > 0$, після чого відобразити симетрично відносно осі ординат Oy на решту області. У випадку непарної функції графік буде симетричний відносно початку координат. Періодичними є переважно функції, складені з простих тригонометричних та деякі параметрично задані функції.

4) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;

5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти кривої;

8) побудувати графік функції.

Приклад 1. [1, 86] Дослідити функцію і побудувати її графік

$$y = \frac{3x}{1+x^2}$$

Розв'язання:

Область визначення $D(y) = R$.

При підстановці $x = 0$ знайдемо значення функції

$$y(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Таку ж саму точку отримаємо, якщо прирівняємо функцію до нуля.

Точка $x = 0$ – **єдина точка перетину з осями координат**.

Перевірка на парність

$$y(-x) = \frac{-3x}{1+(-x)^2} = -\frac{3x}{1+x^2};$$

$$y(-x) = -y(x).$$

Отже, функція **непарна**.

$y' = \frac{3(1+x^2) - 3x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}.$

$$3 - 3x^2 = 0;$$

$$1 - x^2 = 0;$$

$$x^2 = 1;$$

$x = \pm 1.$ – **критичні точки**.

$y(-1) = \frac{-3}{1+(-1)^2} = -\frac{3}{2};$

$y(1) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$

$$y' > 0 \text{ на } x \in (-1; 1);$$
$$y' < 0 \text{ на } x \in (-\infty; -1) \text{ і } x \in (1; +\infty).$$

Функція зростає на $[-1; 1]$ та спадає на $(-\infty; -1]$ і $x \in [1; +\infty)$.

Точка мінімуму:

$x_{min} = -1;$

Точка максимуму:

$x_{max} = 1.$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

y	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$
		min		max	

Табл.1

Графік функції:

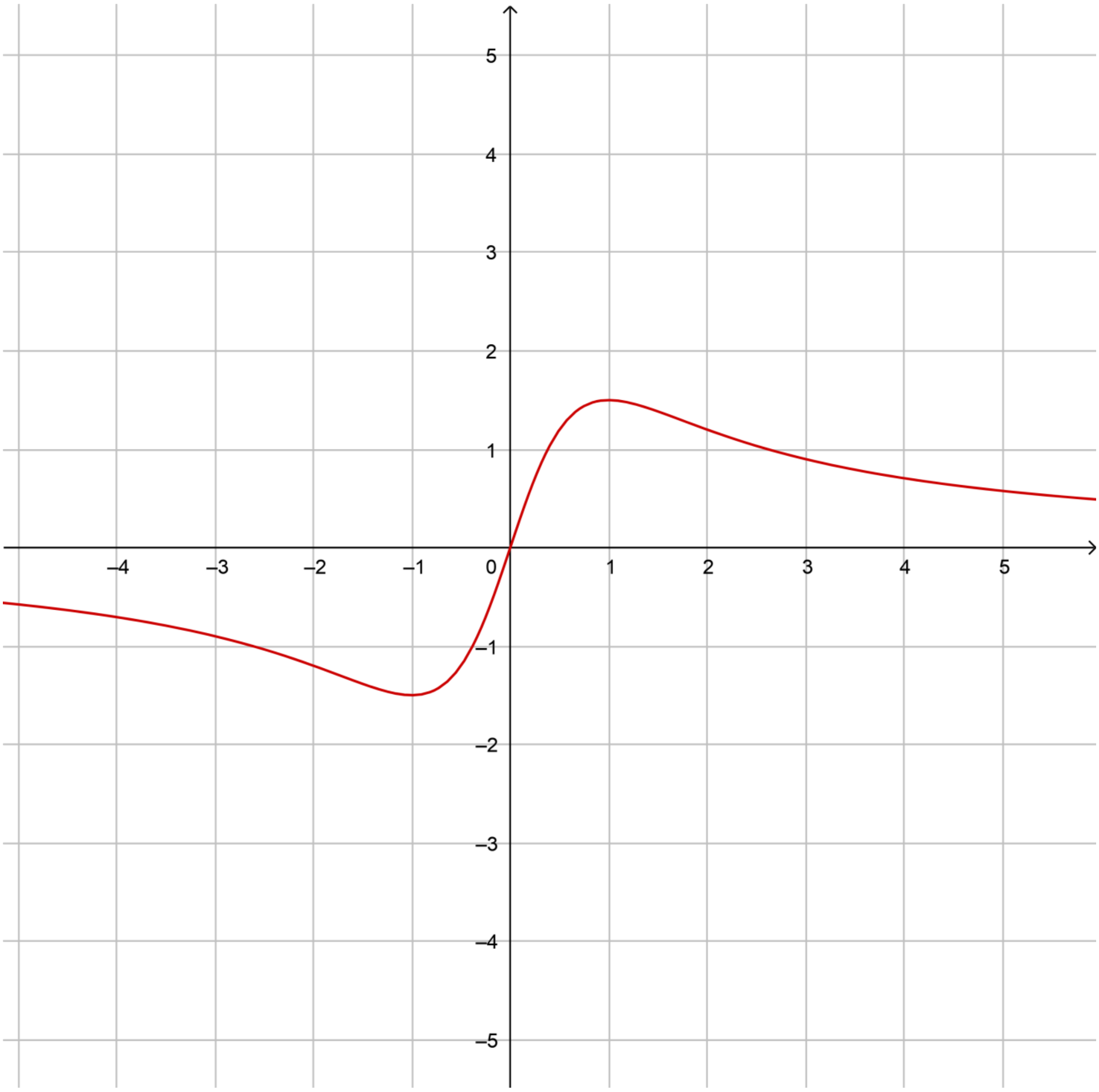

Рис.2

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Вивчення теми «Похідна та її застосування» є важливою та доступною для дітей старших класів. Дана тема має своє відображення в фізиці, економіці, статистиці та в деяких інших науках. Розв’язування задач прикладного змісту, які виникають не лише в математиці, а й поза її межами, сприяє посиленню гнучкості та системності навчання учнів. Подальші дослідження цієї теми можуть бути пов'язані зі складанням математичних, фізичних, економічних задач прикладного характеру, які стосуються різноманітних сфер нашого життя. Це матиме позитивний вплив на теоретичні та практичні знання, уміння та навички учнів старшої школи.

Список використаної літератури

1. Бевз Г.П. Математика: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – 3-тє вид. – К. : Генеза, 2013. – 320 с.: іл. – Бібліогр. : с. 294.
2. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2011. – 431 с. : іл.