

УДК 372+511

**ФАКУЛЬТАТИВНІ ЗАНЯТТЯ З ТЕОРІЇ КОНГРУЕНЦІЙ ЯК ФОРМА
ОРГАНІЗАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЦІЇ ТА ІНДИВІДУАЛІЗАЦІЇ
НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ**

Марченко Костянтин

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені

Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті узагальнюється досвід впровадження факультативного курсу з математики у навчально-виховний процес загальноосвітньої школи. Розглядаються методичні аспекти викладання теорії конгруенцій, факультативний курс з даної теми, погодинне планування, наведено план-конспект одного із занять, які можуть бути корисні для студентів педагогічних вищих навчальних закладів, вчителів математики, слухачів інститутів підвищення кваліфікації.

Ключові слова: факультативне заняття, конгруенція, діофантове рівняння.

**The optional classes of the theory of congruences as a form of organization
the differentiation and the individualization of teaching senior pupils**

K. Marchenko

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences,

Docent Iziyumchenko L.V.

*The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky,
Ukraine*

The article is an attempt to generalize the experience of introducing an optional course in mathematics into the educational process of a secondary school. It gives the methodical aspects of the teaching of the theory of congruences, the hourly planning optional course on this topic and the plan-summary of one of the lessons. It may be interesting for students of pedagogical institutions of higher education, teachers of mathematics, students of institutes of advanced training.

Key words: optional lesson, congruence, diophantine equation.

Постановка проблеми. У загальній структурі профільного навчання у старшій школі курси за вибором (факультативи і спецкурси), на думку вчених, є чи не найважливішими, бо дають змогу максимально індивідуалізувати процес, врахувати генетично закладені здібності дитини. Велика виховна цінність факультативних курсів обумовлена можливостями учнів вибирати

напрямки поглибленої навчальної роботи, це підтверджує актуальність обраної теми.

Метою статті є опис доцільності факультативних занять при вивченні теорії конгруентності як форми організації диференціації та індивідуалізації навчання старшокласників.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Процес реформування системи середньої освіти має включати в себе не лише модернізацію шкільного курсу математики, а й наповнення його новим змістом, який дозволив би підвищити рівень математичної освіти підростаючого покоління. Навчити дітей бачити красу математики, розвивати та формувати інтерес до неї — одне з найважливіших завдань викладання математики, адже стійкий пізнавальний інтерес є одним з інструментів, що спонукає школярів до більш глибокого пізнання предмета, розвиває їхні здібності. Проте знання, які отримують школярі на уроках під час вивчення основного курсу математики, не завжди виявляються достатніми. У зв'язку з цим зростає роль факультативних занять з математики, на яких учні поглиблюють та систематизують знання з основного курсу, отримують додаткову інформацію виходячи з досягнень математичної науки [2;7].

Факультативний курс «Теорія конгруенцій», що пропонується для учнів 9–11 класів, які цікавляться математикою, висвітлює питання, не опрацьовані в базовому курсі шкільної математики.

На сучасному етапі розвитку суспільства перед системою освіти стоїть важлива задача підготовки підростаючого покоління, яке здібне до творчості, відповідає навчальним потребам суспільства і держави, успішне в професійній та соціальній сферах. Розв'язання цієї задачі в певній мірі буде сприяти успішному оволодінню учнями математичних знань, оскільки все більшу актуальність набувають математичні методи дослідження в областях знань не суміжних з математикою.

Одне з важливих математичних понять, яке має широке практичне застосування є лінійні конгруенції. Задачі на застосування обраної теми часто

зустрічаються на математичних олімпіадах, конкурсах. Проте відоме це поняття далеко не всім. Тому такий факультатив є доречним і необхідним для поповнення багажу знань учнів. При відвідуванні представлених факультативних занять учні дізнаються про практичне застосування теорії конгруенцій, застосування теорії лишків до розв'язування конкурсних задач, діофантових рівнянь, тощо.

Метою вивчення курсу є:

- сформулювати в учнів поняття конгруентних чисел, властивостей конгруенцій;
- показати застосування теорії конгруенцій до розв'язування задач;
- розвиток уявлення про математику як потужний метод наукового пізнання;
- формування естетичної культури учнів при вивченні математики;
- формування математичної компетентності учнів.

Основними завданнями курсу є:

- 1) розширення уявлень учнів про основи теорії подільності, розвивати інтерес до математики;
- 2) ознайомлення учнів з теорією конгруенцій та її використання в математиці та в різних сферах людської діяльності;
- 3) підвищення рівня математичного розвитку учнів;
- 4) розширити обсяг знань учнів;
- 5) показати різноманіття застосування математики в реальному житті;
- 6) допомогти зрозуміти ступінь свого інтересу до предмету і оцінити можливість оволодіння ними з точки зору подальшої перспективи (показати можливість застосування отриманих знань в майбутній професії).

Факультатив «Теорія конгруенцій» стане додатковим фактором формування позитивної мотивації у вивченні математики, а також розуміння положення про універсальність математичних знань. Вивчення курсу «Теорія конгруенцій» передбачає формування в учнів інтересу до питань математики, розвиток уявлень про математику та збагачення досвіду її використання.

Очікується, що результатами освоєння учнями цього факультативу можуть стати наступні уміння:

- використовувати математичні знання для опису і розв’язування задач майбутньої професійної діяльності;
- застосовувати отримані знання для опису і аналізу закономірностей, існуючих в оточуючому світі;
- наводити узагальнення і відкривати закономірності на основі аналізу часткових прикладів, висувати гіпотези і робити необхідні перевірки.

Рекомендовані форми занять:

- розповідь вчителів та обговорення її з учнями (співбесіда);
- самостійна робота учнів з джерелами знань;
- практикум з розв’язування задач;
- творча робота учнів.

При роботі з учнями доречно робити акцент на практичному застосуванні теорії конгруенцій до розв’язання конкурсних, олімпіадних задач. Зміст навчального курсу формується за принципом наступності, поєднання науковості та доступності навчального матеріалу. Особливістю занять має бути спонукання учнів до самоосвіти.

Очікувані результати:

Учні повинні знати:

- поняття ділення з остачею;
- означення конгруентних чисел за модулем m ;
- ознаки і властивості конгруенцій;
- наводити приклади конгруентних чисел за модулем m ;
- сфери застосування теорії конгруенцій;

Учні повинні вміти:

- знаходити остачі від ділення двох чисел (з застосуванням теми);
- доводити кратність числа;
- розв’язувати діофантові рівняння першого степеня;
- складати діофантові рівняння, як математичну модель реального процесу.

Факультативний курс розрахований на 5 занять – 1 пара на два тижні. Такий розподіл є доречним, оскільки така кількість годин дозволяє показати всі

азі розділу «Теорія конгруенцій», а також його застосування. А розподіл у вигляді 1 пара на два тижні дає достатньо часу для підготовки учнів до заняття.

Таблиця 1.

№з/п	Тема заняття	Кількість годин
1.	Ділення з остачею. Конгруенції та їх властивості. Розв'язування лінійних конгруенцій з допомогою їх властивостей.	2
2.	Розв'язування задач з теми: «Конгруенції та їх властивості. Розв'язування лінійних конгруенцій з допомогою їх властивостей.»	2
3.	Розв'язування діофантових рівнянь першого степеня.	2
4.	Розв'язування задач прикладного змісту та конкурсних задач на застосування теорії конгруенцій.	2
5.	Підсумкове заняття: «Теорія конгруенцій»	2

Таблиця 2.

№	Тема заняття	Мета	Основні вимоги
1.	Ділення з остачею. Конгруенції та їх властивості. Розв'язування лінійних конгруенцій з допомогою їх властивостей.	Формувати в учнів поняття ділення з остачею, дати означення конгруенції, ознайомитися з властивостями конгруенцій; навчитися розв'язувати лінійні конгруенції з допомогою їх властивостей; виховувати в учнів прагнення до	Учні повинні знати: <ul style="list-style-type: none"> • означення конгруентних чисел за модулем m; • ознаку і властивості конгруенцій; • алгоритм розв'язання лінійної конгруенції;

		самоосвіти; сприяти розвитку пізнавального інтересу учнів, розвивати мислення та увагу.	
2.	Розв'язування задач з теми: «Конгруенції та їх властивості. Розв'язування лінійних конгруенцій за допомогою їх властивостей»	Формувати вміння в учнів розв'язувати лінійні конгруенції з допомогою їх властивостей, вчити розв'язувати задачі на знаходження остач від ділення; виховувати активність, увагу, культуру математичного мовлення та запису; розвивати в учнів увагу та уяву.	Учні повинні знати: <ul style="list-style-type: none"> • означення конгруентних чисел за модулем m; • ознаку і властивості конгруенцій; • алгоритм розв'язання лінійної конгруенції; Учні повинні вміти: <ul style="list-style-type: none"> • розв'язувати лінійні конгруенції; • розв'язувати задачі на знаходження остачі від ділення;
3.	Розв'язування діофантових рівнянь першого степеня.	Формувати в учнів поняття діофантового рівняння, способу розв'язання діофантового рівняння першого степеня; виховувати в учнів прагнення до вдосконалення знань; сприяти розвитку пізнавального інтересу	Учні повинні знати: <ul style="list-style-type: none"> • означення діофантового рівняння; • алгоритм розв'язання діофантового рівняння першого степеня; Учні повинні вміти: <ul style="list-style-type: none"> • розв'язувати діофантові рівняння першого степеня;

		учнів, розвивати мислення та увагу.	
4.	Розв'язування задач прикладного змісту та конкурсних задач на застосування теорії конгруенцій.	Формувати вміння розв'язувати нестандартні задачі та задачі прикладного змісту з використанням конгруенцій; виховувати прагнення до самоосвіти; розвивати логічне мислення, уважність, сконцентрованість.	Учні повинні вміти: <ul style="list-style-type: none"> • застосовувати набуті знання до розв'язування задач прикладного змісту; • скласти математичну модель задачі з допомогою теорії конгруенцій та розв'язувати її;
5.	Підсумкове заняття: «Теорія конгруенцій»	Провести контроль та корекцію знань, умінь та навичок володіння учнями матеріалом з теми «Теорія конгруенцій»; виховувати в учнів прагнення до вдосконалення знань, наполегливість, старанність; розвивати вміння узагальнювати, систематизувати, робити висновки.	Учні повинні знати: <ul style="list-style-type: none"> • основні поняття, що стосуються конгруенцій; • Учні повинні вміти: • застосовувати отримані знання на практиці.

Проілюструємо зміст конкретною розробкою факультативного заняття.
Тема: Розв'язування задач прикладного змісту та конкурсних задач на застосування теорії конгруенцій.

Мета: Формувати вміння розв'язувати нестандартні задачі та задачі прикладного змісту з використанням конгруенцій; виховувати прагнення до самоосвіти; розвивати логічне мислення, уважність, сконцентрованість.

Тип заняття: застосування знань, умінь і навичок.

Хід заняття:

I. Організаційний момент.

Перевірка готовності учнів до заняття, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання. Актуалізація опорних знань.

- Цілі числа a і b називаються конгруентними за модулем m , якщо ...
- Назвіть і охарактеризуйте властивості конгруенцій
- Дослідити і розв'язати з поясненням конгруенцію $5x \equiv 2 \pmod{7}$

III. Мотивація навчальної діяльності.

Звернемо увагу на те, що багато конкурсних задач середньої школи опосередковано використовують теорію остач (елементи теорії конгруенцій). Для розв'язання яких найчастіше складається лінійне невизначене (діофантове) рівняння. Сьогодні на занятті ви познайомитеся детально з такими задачами та ознайомитеся з методами їх розв'язання.

IV. Застосування знань, умінь і навичок.

Приклад 1. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Розв'язання. Маємо: $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$. Очевидно, що $16 \equiv 9 \pmod{7}$. Застосовуючи послідовно властивості конгруенцій, запишемо:

$$16^n \equiv 9^n \pmod{7}, 8 \cdot 16^n \equiv 8 \cdot 9^n \pmod{7},$$

$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n \pmod{7},$$

$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 21 \cdot 9^n \pmod{7}.$$

Права частина останньої конгруенції при діленні на 7 дає в остачі 0. Отже, така властивість притаманна й лівій частині конгруенції.

Приклад 2. Прокладають водопровід довжиною 50 м і є труби завдовжки 2,5 м і 3,5 м. Скільки треба поставити тих і інших труб?

Розв'язання. Нехай є x труб завдовжки 2,5 м і y труб завдовжки 3,5 м. Маємо рівняння: $2,5x + 3,5y = 50 \Leftrightarrow 5x + 7y = 100$. Задача зводиться до розв'язання діофантового рівняння, де x, y – цілі невід'ємні числа. Так як $5, 7 = 1$ то рівняння має цілочислові розв'язки.

Розв'язання рівняння приводить до конгруенції: $5x \equiv 100 \pmod{7}$, скорочуємо на 5, $5, 7 = 1$, тому $x \equiv 20 \pmod{7}$, звідки $x = 20 + 7t, t \in Z$. Підставимо отримане значення в початкове рівняння та виразимо звідти y :

$$y = \frac{100-5x}{7} = \frac{100-5(20+7t)}{7} = \frac{100-100-35t}{7} = -5t, t \in Z.$$

Отже ми отримали: $x = 20 + 7t$
 $y = -5t, t \in Z$. При $t = 0$ маємо: $x = 20, y = 0$.

Тому, треба взяти 20 труб завдовжки 2,5 м і не брати труби завдовжки 3,5 м. Перевірка: $2,5 \cdot 20 + 3,5 \cdot 0 = 50$ – вірно. При $t = -1$ маємо: $x = 13, y = 5$. Таким чином, треба взяти 13 труб завдовжки 2,5 м і 5 труб завдовжки 3,5 м.

Перевірка: $2,5 \cdot 13 + 3,5 \cdot 5 = 50$ – вірно. При $t = -2$, маємо: $x = 6, y = 10$. Отже, треба взяти 6 труб завдовжки 2,5 м і 10 труб завдовжки 3,5 м.

Перевірка: $2,5 \cdot 6 + 3,5 \cdot 10 = 50$ – вірно.

Відповідь: є три можливості 20 труб по 2,5 м або 13 труб по 2,5 м і 5 труб по 3,5 м або 6 труб по 2,5 м і 10 труб по 3,5 м.

Приклад 3. Знайдіть остачу від ділення числа 7^{29} на 5.

Розв'язання. Задача зводиться до того, щоб знайти ціле число x , яке задовольняє дві умови: $0 \leq x < 5$ і $7^{29} \equiv x \pmod{5}$. Маємо:

$$7^2 \equiv -1 \pmod{5}; 7^{28} \equiv (-1)^{14} \equiv 1 \pmod{5};$$

$$7^{29} \equiv 7 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Отже, шуканою остачею є число 2.

Відповідь: остача від ділення дорівнює 2.

[3, 320]

V. Підбиття підсумків уроку. (Фронтальна бесіда)

➤ Нагадайте властивості конгруенцій, які ми використовували під час розв'язування задач сьогодні на занятті.

- Розкажіть послідовність дій при знаходженні остачі від ділення числа a^n на натуральне число b .

VI. Домашнє завдання.

1. Повторити теоретичний матеріал з даного розділу.
2. Використовуючи конгруенції, доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $17^n + 25 \cdot 4^n$ кратне 13.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Практика доводить, що факультативні заняття підвищують самостійну пізнавальну активність учнів, поглиблюючи знання, мають виняткове значення для розвитку їхніх наукових і творчих здібностей. А розвиток факультативних курсів у системі вивчення математики має забезпечити свідомий вибір професії і кращу підготовку старшокласників до практичної діяльності у різних сферах культурного життя країни.

Список використаної літератури

1. Ізюмченко Л.В. Практикум з теорії чисел / Л.В. Ізюмченко. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. – 76 с.
2. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. I. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 320с.
3. Студентський науковий вісник. – Випуск 17. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 384 с.