УДК 519.2

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ В ЕКОНОМІЦІ

Храпаченко Дарина

Науковий керівник: доктор ф.–м. наук, професор Волков Ю.І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто поняття закону великих чисел, його суть, історію та місце у теорії ймовірностей. Показано значущість закону великих чисел для математики, зокрема теорії ймовірностей, та економіки. Розглянуто два основні трактування закону великих чисел. Також розглянуто теорему Бернуллі та її значущість. Наведено теорему Чебишова як один з найбільш загальних законів великих чисел. Наведено приклад застосування теореми Чебишова на практичній задачі. Також у статті розглянуто значущість закону великих чисел для економічної статистики. Наведено приклади дії закону великих чисел в економічних задачах.

Ключові слова: закон великих чисел, теорія ймовірностей, економічна статистика.

Law of large numbers. application of the law of large numbers in economy

D. Khrapachenko

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor Volkov Y.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article discusses the concept of the law of large numbers, its essence, history and place in probability theory. Showing the importance of the law of large numbers for mathematics, including probability theory, and economy. Two major interpretations of the law of large numbers are considered. The Bernoulli theorem and its significance are also considered. The Chebyshev theorem is considered as one of the most general laws of large numbers. An example of the application of Chebishov's theorem on a practical problem is given. Also, the article discusses the importance of the law of large numbers for economic statistics. Examples of the law of large numbers in economic problems are given.

Key words: law of large numbers, probability theory, economic statistics.

Постановка проблеми. Теорія ймовірностей має велике значення для інших наук, особливо тих, що часто мають справу з різноманітними дослідженнями, зокрема статистичними. В свою чергу закон великих чисел відіграє значну роль в економіці та економічній статистиці. То що ж таке закон великих чисел і яке місце він займає в теорії ймовірностей? Як закон великих чисел використовується в економіці?

Аналіз досліджень і публікацій. Вперше закон великих чисел з'явився в роботі Якоба Бернуллі у 1713 році. Це фактично послужило початоv такого розділу математики як теорія ймовірностей. Існує цілий ряд публікацій, в яких розглядається закон великих чисел, див., зокрема, список літератури в джерелах [1] і [2].

Метою роботи. Метою роботи є методичні аспекти при вивченні різних форм закону великих чисел в теорії ймовірностей.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Виникнення теорії ймовірностей як науки відноситься до середніх віків та перших спробам математичного аналізу азартних ігор, таких як кості та рулетка.

Як показує практика неможливо заздалегідь передбачити, яке з можливих значень прийме випадкова величина. Слід відзначити, що про будь-яку випадкову величину ми маємо певні знання, проте буває досить важко знайти закономірності в її поведінці.

Аналіз показав, що при окремих умовах сумарна поведінка достатньо великого числа випадкових величин майже повністю втрачає випадковий характер и при цьому стає закономірною.

На практиці при вивченні закономірностей масових випадкових подій, що залежать від великого числа випадкових факторів, ми використовуємо так звані граничні теореми. До них відносяться теореми Чебишова, Пуассона, Бернуллі тощо.

Важливий вклад в теорію великих чисел зробив Якоб Бернуллі. Заслуга його заключається в тому, що від навів доведення закону великих чисел в найпростішому випадку незалежних випробувань.

Теорема Бернуллі є за своїм змістом тим, що зараз називають граничною теоремою, тобто затвердженням асимптотичного типу, що набуває змістовне значення лише при великих значеннях основного параметра (в даному випадку — числа спостережень). У сучасній теорії ймовірностей граничні теореми і різноманітні їх уточнення складають основну і до того ж найважливішу частину накопичених результатів. Для більшості з них теорема Бернуллі є прародителькою в тому значенні, що кожна з цих граничних теорем є деяким етапом на шляху уточнень і узагальнень першої граничної теореми.

Щоб сказане не викликало сумнівів і заперечень, одразу відзначимо, що перший значний результат, що слідував за теоремою Бернуллі – так звана теорема Муавра – Лапласа, надавав з формальної сторони (при всій великій самостійній значущості теореми) не більше ніж уточнення теореми Бернуллі.

У наш час вже міцно склалася традиція розділяти граничні теореми, споріднені теоремі Бернуллі, на дві самостійні групи, що об'єднують результати типу закону великих чисел і результати типу центральної граничної теореми (найпростішим представником другої групи є теорема Муавра–Лапласа). Насправді принципової відмінності теорем цих двох груп немає, і це розділення треба розглядати просто як дань зручності класифікації.

Велику практичну значущість закону великих чисел сучасники Якоба Бернуллі і подальші покоління учених вбачали у тому, що він став своєрідним мостом, що з'єднав теорію і практику. За рідкісними виключеннями теорія ймовірностей не має нагоди визначати чисто наочним шляхом значення ймовірностей або пов'язаних з ними величин, що являються початковими параметрами даної математичної моделі. Ці знання доводиться здобувати шляхом проведення серії відповідних експериментів, керуючись вказівками закону великих чисел.

По мірі розповсюдження дії закону великих чисел на моделі все зростаючого узагальнення розширялася і сфера його математично обґрунтованого застосування. Проте, проходячи різноманітні стадії узагальнення, закон великих чисел завжди залишався при цьому фактом чисто математичним, що лише більшою чи меншою мірою відображають об'єктивні закономірності реального світу. Тому про прототип математичного закону великих чисел можна говорити як про деяку внутрішню властивість багатьох реальних процесів, що є вельми поширеним феноменом.

Маючи, мабуть, бажання надати означенню закону великих чисел можливо більший обсяг, що відповідає далеко ще не вичерпаним потенційним можливостям застосування цього закону, Андрій Миколайович Колмогоров – один з найбільших математиків XX сторіччя, таким чином сформулював його суть: Закон великих чисел – «загальний принцип, через який сукупні дії великого числа випадкових чинників приводять, за деяких вельми загальних умов, до результату, майже не залежному від випадку».

Таким чином, закон великих чисел має як би два трактування. Одне – математичне, пов'язане з конкретними математичними моделями, і друге – загальніше, що виходить за ці рамки. Друге трактування пов'язане з феноменом утворення, що нерідко відзначається на практиці, в тому або іншому ступені направленої дії на фоні великого числа прихованих або видимих діючих чинників, що зовні такої неперервності не мають. Прикладів пов'язаних з другим трактуванням, можна привести множину якщо звернутися до економіки (феномен ціноутворення на вільному ринку), соціальної сфери (формуванню громадської думки з того або іншого питання) тощо.

Друге розширене розуміння закону великих чисел на відміну від першого, математичного, не пов’язується в загальній ситуації з якою-небудь конкретною моделлю зважаючи на надмірну складність даного явища. Це, втім, не перешкоджає спостереженню усереднюючої дії цього закону в конкретних явищах не тільки на якісному рівні (тенденції до збільшення або зменшення), але і на рівні кількісному.

Необхідно відзначити, що закладені Якобом Бернуллі основи застосування теорії ймовірностей в різних сферах життя суспільства, в тому числі й економіці, мали величезне значення. В праці «Мистецтво припущень» вчений доводить теорему про великі числа. Існує два питання, що пов’язані з теорією ймовірностей. Перше питання заключається в наступному: як будуть співвідноситися результати, отримані на практиці, з теоретичними? Друге питання міститься в вирішені зворотної задачі: чи можна визначити теоретичну ймовірність по результатам випробувань?

Якоб Бернуллі посвятив кілька десятиліть вивченню цієї задачі та математично довів, що при підкиданні грального кубика більше число раз доля випадків, коли випадає чотири вічка, буде наближатися до 1/6. Математик назвав своє відкриття золотою теоремою, проте в сучасному формулюванні вона відома як закон великих чисел.

Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події постійна, то з ймовірністю, прямуючою до 1, можна стверджувати, що при необмеженому збільшенні числа випробувань відносна частота W появи події збігається по ймовірності до її ймовірності P: $\lim_{n\to\infty}(|W-p|<\varepsilon)=1$.

Теорема Бернуллі складається з двох частин, перша з яких говорить про те, що заданої точності можна досягти при скінченному числі експериментів. Друга частина теореми дозволяє розрахувати кількість експериментів, що знадобляться для досягнення бажаної точності.

Наприклад, при проведені виборів у місцеву раду, Верховну Раду можна встановити допустиме значення похибки та визначити число бюлетенів, які мають заповнити виборці, щоб отримати результат з заданою точністю.

Одним з найбільш загальних законів великих чисел являється теорема Чебишова, яка справедлива не лише для дискретних величин, але й для безперервних випадкових величин. Досвід показує, що дана теорема підтверджує зв’язок між випадковістю та необхідністю.

Наприклад. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови в роботі кожного елементу за час T рівна 0,05. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між число відмовивших елементів та середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T виявиться: а) менше двох; б) не менше двох.

Розв’язання. а) Позначимо через дискретну випадкову величину X число відмовивших елементів за час T. Тоді

$M(x) = n * p = 10 * 0{,}05 = 0{,}5;$

$D(x) = n * p * q = 10 * 0{,}05 * 0{,}95 = 0{,}475.$

Скористаємося нерівністю Чебишова: $P(|X - M(x)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}$.

Підставимо M(X)=0,5; D(X)=0,475, ε=2, отримаємо

$P(|X - 0{,}5| < 2) \geq 1 - \frac{0{,}475}{4} = 0{,}88.$

б) Подія |X-0,5|<2 та |X-0,5|≥2 протилежні, тому сума їх ймовірностей ріна одиниці. Отже,

$P(|X - 0{,}5| \geq 2) \leq 1 - 0{,}88 = 0{,}12.$

Таким чином, впевнено сказати, яке можливе значення прийме кожна з випадкових величин, неможна. Проте, можна з певною впевненістю передбачити, яке значення прийме їх середнє арифметичне. Данна характеристика достатньо великого числа незалежних випадкових величин втрачає характер випадкової величини. Це пов’язано з тим, що відхилення кожної з величин від своїх математичних сподівань можуть бути як додатними, так і від’ємними. Однак, в середньому арифметичному відхилені вони взаємно скорочуються.

Застосування закону великих чисел в економіці.

Теорія великих чисел має велике значення для всіх наук, а в особливості для тих, які використовують теорію ймовірностей та статистики на постійній основі. Його дія та застосування впливають на об’єкти статистичного дослідження, розглядаючи їх більш глибоко. Створюючи вибірку з випадкових величин з врахуванням дії закону великих чисел, враховується важливий статистичний метод, що ґрунтується на цьому законі.

Закон великих чисел говорить про кількісні закономірності масових явищ, що чітко проявляються при їх великій кількості.

Тенденції та закономірності, що виявляються за допомогою закону великих чисел, мають силу лише як масові тенденції, але не як закони як для кожного конкретного випадку.

Закон великих чисел в економічній науці та в соціально-економічні статистиці це прояв одного з важливих об’єктивних законів, що супроводжує формування закономірностей масових соціально-економічних процесів.

Наприклад, необхідно дати оцінку прибутків населення певної країни. Візьмемо 15 спостережень, у 10 респондентів прибутки були 30 000, а у 5 – 150 000. Отже, простий середній прибуток буде складати (10x30 000+5x150 000)/15=70 000.

І це зовсім не відображає реальний рівень прибутку жителів даної країни. Якщо ж ми розглянемо 200 спостережень, в яких у 180 осіб прибутки будуть 20 000, а у 20 – 120 000, то середній прибуток буде рівний (180x20 000+20x120 000)/200=30 000. Отриманий результат відображає більш адекватний рівень прибутку даної країни. При збільшенні числа спостережень, середнє буде прямувати до істинного значення.

В якісно однорідних сукупностях, які складаються з випадкових явищ, така закономірність проявляється і її можна дослідити при наявності достатньої кількості одиниць (випадків). Вона може бути кількісно виражена виключно в формі середніх чисел (наприклад, середній рівень, середня доля ознаки в сукупності), оскільки чим більше число одиниць, тим більша точність.

Оскільки закон великих чисел не створює закономірностей, що проявляються, загальної середньої міри для маси одиниць явищ, тому він не може впливати на середній рівень явищ, ні на ступінь стійкості динамічних рядів, ні припустити величину відхилень від середнього рівня, ні пояснити причини виникнення такого рівня чи його відхилень.

Наприклад, припустимо, що зовсім нещодавно заснована компанія КАР має капітал в 20 млн. За перший рік капітал збільшився на 100% з 20 млн. до 40 млн. Акціонерам подобається, що капітал виріс за рік на 100% і їм хочеться подальшого зростання капіталу на 100% в рік. Для цього компанії доведеться збільшити свій капітал на 40 млн. в другому році, но 80 млн. в третьому, на 160 млн. в четвертому і так далі. Якщо б компанія росла на 100% з кожним роком, то через 24 десятиліття її капітал мав би перевищити економіку будь-якої сучасної розвиненої країни. Оскільки компанії ростуть, темпи їх зростання та продуктивності мають сповільнюватися.

Чому це важливо: значно капіталізовані компанії не можуть мати таких самих темпів росту, як компанії з низькою капіталізацією. Закон великих чисел свідчить, що компанії з невеликою ринковою капіталізацією мають більше можливостей не тільки для зростання, а навіть для швидкого зростання, ніж компанії з великою ринковою капіталізацією.

Проте компанії не можуть рости вічно. В підсумку, успішна компанія на своєму шляху буде повинна перейти від зростання до створення стабільного прибутку для її акціонерів.

Розглянемо наступний випадок: припустимо, що ймовірність викрадення автомобіля даної марки вартістю 650 000 складає 0,05 в рік (тобто в середньому викрадають 5 автомобілів із 100). Ймовірність викрадення існує завжди. І хоч це відбувається з 5% власників автомобілів, для кожного з них існує ймовірність виникнення такої стресової ситуації. Є досить логічним, що люди бажають бути захищеними від такого «потрясіння». Якщо у власника є бажання захиститись від такого збитку самостійно, то йому слід збирати кошти на придбання нового автомобіля внаслідок викраденого. А скільки необхідно відкласти кошті автовласнику? Досить ймовірно відповідь – 650 000. Тепер припустимо, що 1500 автовласників вирішать створити страховий фонд для виплат тим, в кого був викрадений автомобіль. У відповідності з законом великих чисел частота викрадення автомобілів буде прямувати до свого теоретичного значення 0,05. Тобто на 1500 автомобілів буде очікуватися 75 викрадень. Якщо розділити вартість автомобілів, які можливо будуть викрадені на всіх учасників фонду, то варто забрати з кожного по (650 000х75)/1500=32 500. За таку плату власник в праві очікувати повної компенсації збитку 650 000, що досить вигідно для всіх власників.

Таким чином, розділ «закон великих чисел» доказує унікальність та необхідність даного матеріалу навіть у повсякденних життєвих ситуаціях.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Закон великих чисел є досить важливою частиною теорії ймовірностей. Проте він важливий не тільки з точки зору математики, він несе ще й значне світоглядне навантаження, демонструючи, що усереднення випадкових величин дозволяє нам отримати більш точне уявлення про оточуючий світ. Іншими словами, закон великих чисел демонструє наявність закономірності у випадковому, встановлює зв'язок між ними. Крім того закон великих чисел активно використовується не лише в математиці, а й в економіці, статистиці, психології тощо. Застосування закону в цих галузях дозволяє побачити його роботу не лише на загальних прикладах математики, а й на більш життєвих, а отже і більш зрозумілих прикладах, що в свою чергу може суттєво полегшити пояснення даної теми.

Список літератури

1. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. - Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. – 190 с.
2. Хінчин О. Я. Основні закони теорії ймовірностей. Теорема Лапласа. Закон великих чисел. Закон повторного логарифму // (Сучасна математика). – 1932. – 86 с.