УДК 511.26

СПЕЦІАЛЬНІ ЧИСЛА ТА ЇХ КОМБІНАТОРНЕ ТЛУМАЧЕННЯ

Арсеньєва Наталія

Науковий керівник: докт. ф.-м. наук, професор Волков Ю.І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Метою даної статті є розкриття та розтлумачення поняття «спеціальні числа». У статті розглядають такі послідовності чисел, як числа Стірлінга, Ейлера, Фібоначчі, Бернуллі, гармонійні числа. Поняття кожної з цих послідовностей чисел доступно та детально розписане та наведені приклади. Деякі послідовності чисел виникають в математиці досить і часто і їх розпізнають майже миттєво. Такими послідовностями є послідовність простих чисел, квадратних, трикутних. Ці та інші послідовності чисел називають спеціальними. В даній статті розглянуто ті послідовності, які не так часто використовуються в звичайному житті, але досить часто застосовуються у математиці.

Ключові слова: числа Ейлера, числа Стірлінга, числа Бернуллі, гармонічні числа, числа Фібоначчі.

Special numbers and their combinatorial interpretation

N. Arsen'yeva

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor Volkov Y.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The purpose of this article is to disclose and interpret the concept of "special numbers". The article considers such sequences of numbers as Stirling, Euler, Fibonacci, Bernoulli, harmonic numbers. The concept of each of these sequences of numbers is available and detailed and examples are given. Some number sequences occur quite often in mathematics and are recognized almost instantly. Such sequences are a sequence of Prime numbers, square, triangular. These and other sequences of numbers are called special. This article discusses those sequences that are not so often used in everyday life, but quite often used in mathematics.

Keywords: Euler numbers, Stirling numbers, Bernoulli numbers, harmonic numbers, Fibonacci numbers.

Постановка проблеми. Числа Стірлінга першого та другого роду, числа Ейлера, Бернуллі, Фібоначчі, гармонічні часто використовуються в різних розділах математики, інформатики. Тому актупльнм ж розробка методики роботи ц цими комбінаторними об’єктами.

Аналіз досліджень і публікацій. Спеціальні числа та їх комбінаторне тлумачення займають центральне місце в дискретній математиці, і не тільки. Цей матеріал практично розглядається в усіх монографіях і навчальних посібниках з комбінаторного аналізу. Вкликий список літератури подано в видатній монографії: Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э.Бе, Паташник О. Конкретная математика. Основание інформатики. – М.: Мир, 1998.

Метою роботи є розгляд методичних аспектів при знайомстві з числами Стірлінга 1-го і 2-го ороду, а також з числами Ейлера. і Бернуллі.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. *Числом Стірлінга першого роду* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ позначається кількість способів подання *n* об'єктів в вигляді *k* циклів (або кількість способів посадити *n* чоловік з номерами на майках за *k* однакових круглих столів так, щоб за кожним столом хтось сидів). Зауважимо, що нам важливий порядок, в якому вони розташовані, на відміну від другого роду. Виходячи з цього, наприклад, можна довести, що для будь-яких *n* і *k* виконується $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \le \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Числом Стірлінга другого роду $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ позначається кількість способів розбиття множини з *n* елементів на *k* непорожніх підмножин (або, за потреби, кількість способів розкласти *n* різних предметів в *k* однакових мішків так, щоб жоден з мішків не залишився порожнім). У даній роботі більш детально зупинимось на числах Стірлінга першого роду.

Розглянемо тепер перестановку, яка переводить 123456789 в 384729156.

Для наочності її можна уявити в двох рядках:

123456789

384729156

звідки видно, що 1 переходить в 3, 2 переходить в 8 і т.д. Виникає циклічна структура, бо число 1 переходить в 3, яке переходить в 4, яке переходить в 7, яке переходить назад в 1, тобто, це цикл [1,3,4,7]. Іншим циклом в цій перестановці [2,8,5] ще одним – [6, 9]. Таким чином, перестановка 384729156 еквівалентна циклічному поданню, що складається з трьох циклів:

[1,3,4,7] [2,8,5] [6, 9]

Аналогічне до цього розбиття розсадження людей за столами:

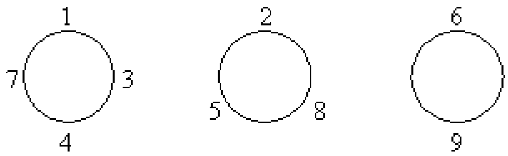

Рис. 1

Тепер виведемо рекурентну формулу для обчислення чисел Стірлінга першого роду. Розділимо варіанти розсадження n чоловік за k столів на дві групи:

1. n-а людина сидить за окремим столом;
2. n-а людина сидить за одним столом ще з ким-небудь.

Тоді зрозуміло, що кількість варіантів групи 1 дорівнюватиме $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

Щоб розсадити людей 2-им способом, потрібно спочатку розсадити n - 1 людину за k столів $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ варіантів), а потім посадити до них n-у людину (n - 1 варіант, кожен з яких є способом вибрати його лівого сусіда). Таким чином, загальна кількість варіантів буде:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Використовуючи дану рекурентну формулу легко отримати кілька перших чисел Стірлінга:

Таблиця 1

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Числа Ейлера

В комбінаториці числом Ейлера I роду з n по k, позначається $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ або E (n, k) , Називається кількість перестановок порядку n з k підйомами, тобто таких перестановок $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, що існує рівно k індексів j, для яких $\pi_j < \pi_{j+1}$. Числа Ейлера I роду мають також геометричну та ймовірнісну інтерпретацією – число $\frac{1}{n!}\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ висловлює:

- обсяг частини n-мірного гіперкуба, обмеженого гіперплощинами $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ і $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k - 1$;
- ймовірність того, що сума n незалежних рівномірно розподілених у відрізку [0,1] змінних лежить між k -1 і k. [2]

Числа Бернуллі

У математиці, числа Бернуллі B_n є послідовністю раціональних чисел, яка глибоко пов'язана з теорією чисел. Вони тісно пов'язані зі значеннями дзета-функції Рімана для від'ємних аргументів.

Числа Бернуллі - послідовність раціональних чисел, вперше розглянута Якобом Бернуллі у зв'язку з обчисленням суми послідовних натуральних чисел, зведених в одну і ту ж ступінь :

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} \binom{k+1}{s} B_s N^{k+1-s}.$$

Є кілька означень для чисел Бернуллі. Найпоширенішим є $B_n = 0$ для всіх непарних n, крім 1 і $B_1 = -1/2$, але деякі автори використовують $B_1 = \pm 1/2$, а деякі пишуть B_n для B_{2n}.

Для чисел Бернуллі існує наступна рекурентна формула :

$$B_0 = 1 \ ,$$

$$B_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}B_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Значення перших ненульових чисел Бернуллі:

Таблиця 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_n	1	−1/2	1/6	0	−1/30	0	1/42	0	−1/30	0	5/66	0	−691/2730	0	7/6

Числа Фібоначчі

У XIII столітті італійський математик Фібоначчі розв'язував таку задачу: Фермер годує кроликів. Кожен кролик народжує одного кролика, коли йому стає 2 місяці, а потім дає потомство в 1 кролик кожен місяць. Скільки кроликів буде у фермера через *n* місяців, якщо спочатку у нього був лише один (вважаємо, що кролики не гинуть і кожен народжений дає потомство за вище описаною схемою)?

Очевидно, що першого та другого місяця у фермера залишається один кролик, оскільки потомства ще немає. На третій місяць буде два кролики, оскільки перший через два місяці народить другого кролика. На четвертий місяць перший кролик дасть ще одного, а другий кролик потомства не дасть, оскільки йому ще тільки один місяць. Отож на четвертий місяць буде три кролики.

Можна помітити, що кількість кроликів після *n*-го місяця дорівнює кількості кроликів, які були у *n-1* місяці, плюс кількість народжених кроликів. Останніх буде стільки, скільки є кроликів, що дають потомство, або дорівнює кількості кроликів, яким вже виповнилося 2 місяці (тобто кількості кроликів після *n-2* місяця).

Якщо через F_n позначити кількість кроликів після n-го місяця, то має місце таке рекурентне співвідношення:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ , F_1 = F_2 = 1$$

Покладемо $F_0 = 0$, при цьому співвідношення при $n = 2$ залишиться істинним. Таким чином утворюється послідовність

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Ця послідовність виникає у найрізноманітніших математичних ситуаціях — комбінаторних, числових, геометричних.

Простіше кажучи, перші два члени послідовності — одиниці, а кожний наступний — сума значень двох попередніх чисел [3].

В математиці n-м гармонійним числом називають суму зворотніх величин перших n послідовних чисел натурального ряду.

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Гармонійні числа є частковими сумами гармонійного ряду.

Гармонічні числа можна визначити рекурентно наступним чином

$$\begin{cases} H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} \\ H_1 = 1 \end{cases}$$

n-а часткова сума гармонійного ряду, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$ називається *n-им* гармонійним числом. Різниця між *n-м* гармонійним числом і натуральним логарифмом n сходиться до постійної Ейлера-Маскероні.

Різниця між різними гармонійними числами ніколи не дорівнює цілому числу і ніяке гармонійне число, крім $H_1 = 1$, не є цілим [1].

Список літератури

1. Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987.
2. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1985.
3. Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание інформатики. – М.: Мир, 1998.