УДК 519.21

ОЦІНКА ВІДХИЛЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ БІНАРНОЇ СТСТЕМИ РІВНЯНЬ КОЛМОГОРОВА ПРИ МАЛИХ ЗБУРЕННЯХ ПАРАМЕТРІВ

Бондаренко Юлія, Макарчук Олег

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький Україна

Стаття присвячена дослідженню величини відхилення розв'язків бінарної системи рівнянь Колмогорова засобами математичного аналізу та онлайн сервісу yotx.ru. Здійснюється акцент на випадок синхронних залежних відхилень, причому відхилення відповідних розв'язків знаходяться по відношенню до метрики Чебишева.

Ключові слова: випадковий процес, щільність розподілу, рівняння Колмогорова, ланцюг Маркова, неперервний час.

EVALUATION OF DISCHARGE OF SOLUTIONS OF BINARY STOMAS OF COLOMOGOROPIC EQUATIONS AT SMALL CHECKING OF PARAMETERS

Bondarenko Julia, Makarchuk Oleg

Scientific adviser: Ph.D. Sciences, associate professor Makarchuk O.P.

Central Ukrainian State Pedagogical University

named after Volodymyr Vynnychenko, Kropivnitsky Ukraine

The article is devoted to the study of the magnitude of the deviation of solutions of the binary system of Kolmogorov equations by means of mathematical analysis and the online service yotx.ru. The emphasis is placed on the case of synchronous dependent deviations, and deviations of the corresponding solutions are in relation to the Chebyshev metric.

Key words: random process, distribution density, Kolmogorov equation, Markov chain, continuous time.

Постановка проблеми: дослідження асимптотики відхилення розв'язків системи рівнянь Колмогорова при синхронних малих збуреннях параметрів.

Аналіз досліджень і публікацій. У теорії ймовірностей ланцюгом Маркова [2] з неперервним часом називається випадковий процес $\{ X(t) : t \geq 0 \}$ визначений у неперервному часовому проміжку, що приймає значення у деякій скінченній чи зліченній множині і задовольняє властивість Маркова.

Відмінність цього виду ланцюгів Маркова від дискретних ланцюгів Маркова полягає в тому, що переходи між станами можуть відбуватися в будь-які моменти часу і час наступного переходу теж є випадковою величиною.

Властивість, яка характеризує процес як марківський, прийнято називати марківською або властивістю Маркова. Вперше ця властивість була сформульована російським математиком ***А.А.Марковим***, який в 1907 році поклав початок вивченню послідовностей залежних випробувань і пов'язаних з ними сум випадкових величин [5]. Цей напрямок досліджень відомий зараз під назвою теорії ланцюгів Маркова.

Основи загальної теорії марківських процесів з неперервним часом були закладені у працях ***А.М. Колмогорова[7].***

Застосування ланцюгів Маркова можна прослідкувати в багатьох областях. Неперервні ланцюги Маркова є потужною математичною моделлю багатьох процесів опису функціонування біологічної системи в умовах виживання та вимирання, конкуренції, системах масового обслуговування.

Неперервний ланцюг Маркова включає в себе доволі широкий спектр випадкових процесів: процеси чистого розмноження або вимирання з незалежними від часу або стану інтенсивностями, процес Пуассона, процес Юла, системи массового обслуговування з різною кількістю каналів та систем відмов.

Важливим аспектом у функціонуванні системи підпорядкованої опису рівняннями Колмогорова є те, що відповідні розв’язки безумовно є стійкими при малих збуреннях відповідних параметрів. Однак важливим є те, що цікаво знати на скільки відповідне збурення виведе систему з рівноваги, а точніше якими будуть відхилення розв’язків системи по відношенню один до одного.

Все вище сказане підкреслює актуальність дослідження ймовірнісних характеристик неперервних ланцюгів Маркова, по відношенню до незначних збурень відповідних параметрів, особливий акцент у відповідній роботі ми робимо на використанні як аналітичних засобів так і на використанні комп’ютерних засобів.

Проблема дослідження: дослідити величину відхилення розв’язків бінарної системи рівнянь Колмогорова засобами математичного аналізу.

Розглянемо наступний приклад класичного аналізу найпростішого неперервного однорідного ланцюга маркова.

Граф однорідного марківського ланцюга з неперервним часом з відповідними інтенсивностями має вигляд,

$$S_0 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} S_1$$

а) скласти та розв’язати відповідну систему рівнянь Колмогорова (в нульовий момент часу система була в стані S_0);

б) знайти фінальні ймовірності.

Розв’язання.

а) Матриця інтенсивностей має вигляд:

$$P = \begin{matrix} 0 & a \\ b & 0 \end{matrix}$$

Система рівнянь Колмогорова має вигляд:

$$p_0{}'(t) = bp_1(t) - ap_0(t);$$
$$p_1{}'(t) = ap_0(t) - bp_1(t);$$

Розв’яжемо її класично методом підстановки:

$$\frac{1}{a}(p_1'\ t\ + bp_1\ t\ ) = p_0(t),$$

Підставляючи в перше рівняння маємо:

$$\frac{1}{a}p_1''\ t\ + \frac{b}{a}p_1'\ t\ = bp_1\ t\ - \ p_1'\ t\ + bp_1\ t\ \ ,$$

$$p_1''\ t\ = -(a+b)p_1'\ t\ ,$$

$$p_1'\ t\ = C_1 e^{-(a+b)t},$$

$$p_1\ t\ = C_3 + C_2 e^{-(a+b)t}.$$

Оскільки $p_1\ 0\ = 0$, то

$$p_1\ t\ = C_3 - C_3 e^{-(a+b)t}.$$

$$p_0(t) = \frac{1}{a}(p_1'(t) + bp_1(t)) = \frac{b}{a}C_3 + C_3 e^{-(a+b)t}.$$

Оскільки $p_0(0) = 1$, то

$$C_3 = \frac{a}{a+b}.$$

Отже,

$$p_0(t) = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t},$$

$$p_1(t) = \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t}.$$

Для відповідного ланцюга Маркова якому відповідає граф

$$S_0 \underset{b+\varepsilon}{\overset{a+\varepsilon}{\rightleftarrows}} S_1$$

Маємо розв’язки :

$$p_0^*(t) = \frac{b+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon} + \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon}e^{-(a+b+2\varepsilon)t},$$

$$p_1^*(t) = \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon} - \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon}e^{-(a+b+2\varepsilon)t}.$$

Перед тим як аналізувати відхилення будемо вважати, що $a, b > 0$ та ε достатньо мале дійсне число.

Оскільки

$$p_1^*(t) = 1 - p_0^*(t),$$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t),$$

то

$$|p_1^*(t) - p_1(t)| = |p_0^*(t) - p_0(t)|$$

і достатньо аналізувати відхилення саме для $p_0^*(t), p_0(t)$.

Враховуючи формулу Лагранжа для функції

$$g(\varepsilon) = \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon} - \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon}e^{-(a+b+2\varepsilon)t}.$$

маємо:

$$|p_0^*(t) - p_0(t)| = |g(\varepsilon) - g(0)| = |g'(z)|\varepsilon,$$

де $z \in (0;\varepsilon)$.

Маємо:

$$|g'(z)| = \left|\frac{a-b}{(a+b+2\varepsilon)^2} + \frac{b-a}{(a+b+2\varepsilon)^2}e^{-(a+b+2\varepsilon)t} + \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon}e^{-(a+b+2\varepsilon)t}\right|$$

$$\le \frac{2}{a+b} + \max\left(\frac{a}{a+b};\frac{1}{2}\right).$$

Оскільки для функції

$$h(\varepsilon) = \frac{a+\varepsilon}{a+b+2\varepsilon}$$

$$h'(\varepsilon) = \frac{b-a}{(a+b+2\varepsilon)^2}.$$

А саме при $a > b$:

$$h(\varepsilon) < h(0) = \frac{a}{a+b}.$$

При $a < b$:

$$h(\varepsilon) < h(+\infty) = \frac{1}{2}.$$

При $a = b$:

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$|p_0^*(t) - p_0(t)| \le \left(\frac{2}{a+b} + \max\left(\frac{a}{a+b};\frac{1}{2}\right)\right)\varepsilon.$$

Розглянемо наступний приклад $a = 2, b = 3, \varepsilon = 0{,}01$ для класичного аналізу найпростішого неперервного однорідного ланцюга маркова.

Маємо:

$$p_0(t) = 0{,}6 + 0{,}4e^{-5t},$$

$$p_1(t) = 0{,}4 - 0{,}4e^{-5t}.$$

і відповідно:

$$p_0^*(t) = 0{,}598 + 0{,}402e^{-5{,}02t},$$

$$p_1^*(t) = 0{,}402 - 0{,}402e^{-5{,}02t}.$$

За відповідними аналітичними викладками:

$$|p_0^* \ t \ - p_0 \ t \ | \le \ \frac{2}{a+b} + \max(\frac{a}{a+b};\frac{1}{2}) \ \ \varepsilon = 0{,}009.$$

Побудуємо графік відхилення $y = |p_0^* \ t \ - p_0 \ t \ |$:

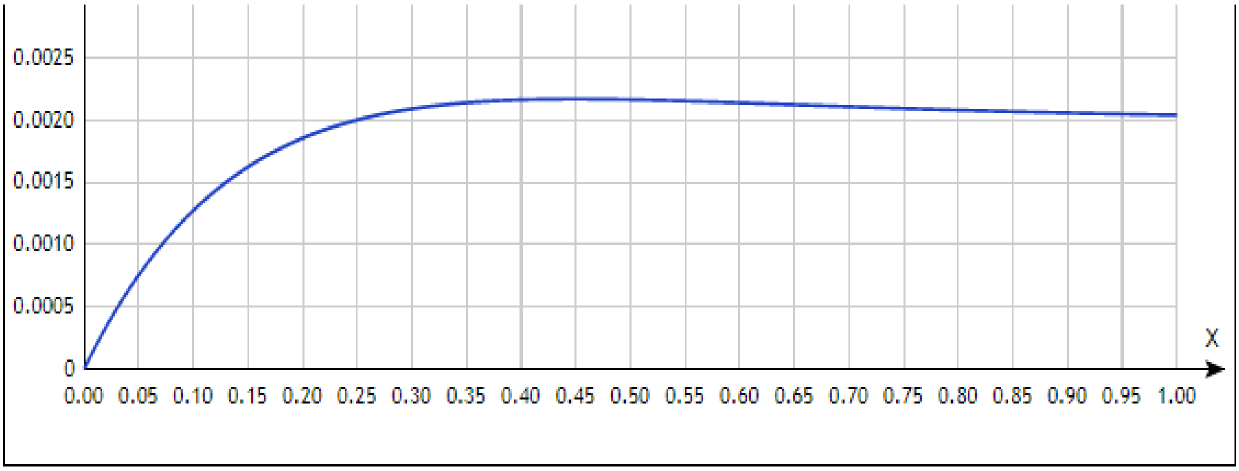

Рис 1. Графік $y = |p_0^* \ x \ - p_0 \ x \ |$.

Знайдемо також значення відповідної функції

x	y
0.00	0
0.05	0.00076
0.10	0.00127
0.15	0.00162
0.20	0.00185
0.25	0.002
0.30	0.00209
0.35	0.00214
0.40	0.00216
0.45	0.00217
0.50	0.00216
0.55	0.00215
0.60	0.00214
0.65	0.00212
0.70	0.00211
0.75	0.00209
0.80	0.00208
0.85	0.00207
0.90	0.00206
0.95	0.00205
1.00	0.00204

Рис 2. Значення функції $y = |p_0^* \ x \ - p_0 \ x \ |$.

З таблиці видно, що

$$max_{x \ge 0}|p_0^* \ x \ - p_0 \ x \ | = 0{,}00217.$$

Список літератури

1. Бородин А.Н. Случайные процессы СПб. : Лань, 2013. — 640 с.
2. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Физматлит, 1972. — 368 с.
3. Бернулли Я. О. законе больших чисел. – М.: Наука,1986. – 176 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 439 с.
6. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. К: Вища школа, 1975.— 295 с.
7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.