УДК 517.5

ЛІНІЙНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ КРАТНИХ РЯДІВ ФУР'Є

Макаренко Андрій

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук Гаєвський М.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В роботі отримано оцінку величини $\iint\limits_{T^2} \left|K_n(x_1,x_2)\right| dx_1 dx_2$, $T^2=[0,\pi]^2$, *де* $K_n(x_1,x_2)$ *– ядро деякого лінійного методу підсумовування, породжено трикутною матрицею дійсних чисел, елементи якої утворюють випуклу послідовність.*

Ключові слова: ряд Фур'є, функція двох змінних, випукла послідовність, метод підсумовування.

We obtain the estimate of $\iint\limits_{T^2} \left|K_n(x_1,x_2)\right| dx_1 dx_2$, $T^2=[0,\pi]^2$, *where* $K_n(x_1,x_2)$ *– the core of a linear summation method generated triangular matrix of real numbers, elements which form convex sequence.*

Keywords: Fourier function of two variables, convex sequence, summation method.

Постановка проблеми. Нехай $f(x_1,x_2)$ – сумовна функція періоду 2π по кожній змінній і

$$S(f,x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_1=k} \gamma_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2,$$

де

$$\gamma_{l_1 l_2}=\begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ при } l_1^2+l_2^2=0 ; \\ \frac{1}{2}, \text{ при } l_1 \cdot l_2 = 0, l_1^2+l_2^2 \neq 0; \\ 1, \text{ при } l_1^2+l_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

– її ряд Фур'є.

За допомогою трикутної матриці

$$\Lambda = \left(\lambda_k^{(n)}\right), \quad k=0,1,\dots,n+1; \ \ n=0,1,\dots; \ \ \lambda_0^{(n)}=1, \ \ \lambda_{n+1}^{(n)}=0$$

кожній функції $f(x_1,x_2)$ ставиться у відповідність тригонометричний поліном $U_n(f,x_1,x_2,\Lambda)$:

$$U_n(f,x_1,x_2,\Lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}a_k\sum_{l_1+l_1=k}\gamma_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2,\quad n=1,2,\dots\ .$$

Позначимо через $K_n(x_1,x_2)$ ядро методу $U_n(f,x_1,x_2,\Lambda)$, тобто

$$K_n(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\sum_{l_1+l_1=k}\gamma_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2,\quad n=1,2,3,\dots\ .$$

При дослідженні умов збіжності лінійних середніх до функції в просторі неперервних функцій важливою задачею є встановлення факту обмеженості наступного інтегралу $\iint_{T^2}\left|K_n\ \ x_1,x_2\ \right|dx_1dx_2$

Аналіз досліджень і публікацій. З теорією тригонометричними рядами від однієї змінної та основними задачами можна ознайомитися у [1]. В одновимірному випадку вивченням даної задачі займались Нікольський, Стєчкін [2], Єфімов [3], Теляковський [4] та інші. У багатовимірному випадку відомі результати для конкретних випадків матриці Λ, зокрема, оцінки для ядра отримали Валле-Пуссена – Скопіна [7], ядра Фейера – Подкоритов [8]. Наведемо деякі відомі факти, для матриці $\Lambda=\ \ \lambda_k^{(n)}$ та ядра

$$K_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kx,\quad n=1,2,3,\dots$$

у [2] при умові, що послідовність $\lambda_k^{(n)}\mid\lambda_0^{(n)}=0;\ \Delta\lambda_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}-\lambda_{k-1}^{(n)}\ge 0;\ \Delta^2\lambda_k^{(n)}=\Delta\lambda_k^{(n)}-\Delta\lambda_{k-1}^{(n)}\le 0,\ (k=1,\dots,n+1)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_n\ \ x\ \right|dx\le\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{k}+C\lambda_n.$$

В [3] отримано оцінку

$$\int_0^{\pi}\left|K_n(x)\right|dx\le C_1+C_2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1\quad n-k}{n+1}\left|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\right|+C_3\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|}{n-k+1}.$$

Пізніше в [4] повністю розв’язано цю задачу і відомо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|a_0+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|dx-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xi\ \ b_k,\sqrt{a_{n-k}^2+b_{n-k}^2}\ \ \right|\le$$

$$\le C\left(\left|a_0\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\ \ n-k}{n}\ \ \left|\Delta^2a_{k-1}\right|+\left|\Delta^2b_{k-1}\right|\ \right),$$

де $\xi(A,B)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}|A|, & \text{при } |B|\le|A|,\\ |A|\arcsin\left|\dfrac{A}{B}\right|+\sqrt{B^2-A^2}, & \text{при } |B|>|A|.\end{cases}$

У двовимірному випадку відомий результат [5]:

Нехай $k=(k_1,k_2),\ n=(n_1,n_2),\ k_1,k_2,n_1,n_2\in N; 0=(0,0),\ x=(x_1,x_2)$ і ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(a_k\cos k_1x_1\cos k_2x_2+b_k\cos k_1x_1\sin k_2x_2+c_k\sin k_1x_1\cos k_2x_2+d_k\sin k_1x_1\sin k_2x_2\right),$$

де

$$\gamma_k=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, k_1=k_2=0;\\ \dfrac{1}{2}, k_1\cdot k_2=0, k_1^2+k_2^2\ne 0;\\ 1, k_1\cdot k_2\ne 0;\end{cases}$$

є подвійним рядом Фур'є сумовної, 2π-періодичної по кожній змінній функції $f(x_1,x_2)$, то для довільної матриці $\Lambda=\left(\lambda_k^{(n)}\right)$

$$\sup_{|f|\le 1}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k\lambda_k^{(n)}\left(a_k\cos k_1x_1\cos k_2x_2+b_k\cos k_1x_1\sin k_2x_2+c_k\sin k_1x_1\cos k_2x_2+d_k\sin k_1x_1\sin k_2x_2\right)\right\|_C=$$

$$=\frac{16}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left|\lambda_k^{(n)}\right|}{(n_1-k_1)(n_2-k_2)}+O\left(\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\frac{\left|\lambda_{k_1,0}^{(n)}\right|+H_{n_2}^{k_1}(\lambda)}{n_1-k_1}+\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\frac{\left|\lambda_{0,k_2}^{(n)}\right|+H_{n_1}^{k_2}(\lambda)}{n_1-k_1}+h_n(\lambda)\right),$$

де

$$\Delta_{0,1}^1a_k=a_{k_1,k_2}-a_{k_1,k_2+1},\ \Delta_{0,2}^2a_k=\Delta_{0,1}^1\left(\Delta_{0,1}^1a_k\right),\ \Delta_{2,0}^2a_k=\Delta_{1,0}^1\left(\Delta_{1,0}^1a_k\right),\ \Delta_{1,2}^3a_k=\Delta_{1,0}^1\left(\Delta_{2,0}^2a_k\right),$$

$$\Delta_{2,1}^3a_k=\Delta_{0,1}^1\left(\Delta_{2,0}^2a_k\right),\ \Delta_{2,2}^4a_k=\Delta_{1,0}^1\left(\Delta_{1,2}^3a_k\right),$$

$$H_{n_2}^{k_1}(a)=\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\frac{(k_1+1)(n_1-k_1)}{n_1+1}\left|\Delta_{2,0}^2a_k\right|,\ H_{n_1}^{k_2}(a)=\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\frac{(k_2+1)(n_2-k_2)}{n_2+1}\left|\Delta_{0,2}^2a_k\right|,$$

$$h_n(a)=a_0+H_{n_1}^0(a)+H_{n_2}^0(a)+\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\frac{(k_1+1)(n_1-k_1)(k_2+1)(n_2-k_2)}{(n_1+1)(n_2+1)}\left|\Delta_{2,2}^4a_k\right|.$$

Мета статті. До вивчення тригонометричних поліномів подібного роду зводиться багато задач з наближення функцій. Тому для нас актуальним є питання, як від матриці $\Lambda = \lambda_k^{(n)}$ залежатиме величина $\iint\limits_{T^2} \left| K_n \; x_1, x_2 \; \right| dx_1 dx_2$,

$T^2 = \; 0;\pi \; ^2$.

Виклад основних результатів дослідження. В даній роботі доводяться наступна теорема.

Теорема 1. Нехай для матриці $\mu_k^{(n)}$ виконуються наступні умови $\mu_0^{(n)} = 0;\ \Delta\mu_k^{(n)} = \mu_k^{(n)} - \mu_{k-1}^{(n)} \ge 0;\ \Delta^2\mu_k^{(n)} = \Delta\mu_k^{(n)} - \Delta\mu_{k-1}^{(n)} \le 0,\ (k = 1,\dots,n+1)$, тоді для ядра $K_n(x_1, x_2) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu_{n-k}^{(n)} \sum\limits_{l_1+l_1=k} \gamma_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2, \quad n = 1,2,3,\dots$

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{T^2} \left| K_n \; x_1, x_2 \; \right| dx_1\, dx_2 \le \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left|\mu_k^{\ n}\right|}{k}\ln\left(\frac{n+1}{k}+1\right) + C_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left|\mu_k^{\ n}\right|}{k} + C_2\left|\mu_n^{\ n}\;\right|.$$

Тут та далі під $C_1, C_2, \dots$ розумітимемо абсолютні сталі, взагалі у різних формулах різні.

Допоміжні твердження. Введемо наступні позначення, якими в подальшому будемо користуватися:

$$\lambda_{n+1} = 0,\ \Delta_k = \Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1} \quad k = 0,1,\dots,n \ ,$$
$$\Delta_k^2 = \Delta^2\lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \quad k = 0,1,\dots,n-1 \ ,$$

$$H_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1 \quad n-k}{n+1}\left|\Delta_k^2\right|. \tag{0.1}$$

Лема 1. Якщо $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, то

$$\sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\left|\Delta_k^2\right| \le CH_1(n), \tag{0.2}$$

та

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\left|\Delta_k^2\right| \le CH_1(n). \tag{0.3}$$

Доведення вказаних властивостей випливає безпосередньо з рівності (0.1).

Лема 2. Справедливі оцінки

1. $\left|\lambda_k^{(n)}\right| \le C_1 + C_2 H_1(n)$ для $\forall k \in [0, n]$;

2. $k\left|\Delta_k\right| \le C_1 + C_2 H_1(n)$ для $\forall k \in [0, \nu], \nu = \left[\frac{n}{2}\right]$

3. $(n-k+1)\left|\Delta_k\right| \le C_1 + C_2 H_1(n)$ для $\forall k \in [\nu, n], \nu = \left[\frac{n}{2}\right]$;

4. $\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta_k\right| \le C_1 + C_2 H_1(n)$.

Доведення цих рівностей можна, наприклад, знайти у роботі [3].

Лема 3. Якщо для послідовності μ_k виконуються наступні умови

$$\mu_0 = 0;\ \Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k-1} \ge 0;\ \Delta^2\mu_k = \Delta\mu_k - \Delta\mu_{k-1} \le 0,\ (k = 1, \dots, n+1),$$

то справедливі рівності

$$(n+1)\Delta\mu_n \le \mu_n, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta^2\mu_{k+1} \le \mu_n \tag{0.4}$$

Доведення: Легко бачити,

$$\mu_n = \mu_n - \mu_0 = \mu_n - \mu_{n-1} + \mu_{n-1} + \dots + \mu_1 - \mu_0 =$$

$$= \Delta\mu_n + \Delta\mu_{n-1} + \dots + \Delta\mu_1 = \sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k = \sum_{k=1}^{n}(k+1-k)\Delta\mu_k = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\Delta\mu_k - \sum_{k=1}^{n}k\Delta\mu_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta\mu_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta\mu_{k+1} = (n+1)\Delta\mu_n + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta\mu_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta\mu_{k+1} =$$

$$= (n+1)\Delta\mu_n - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta^2\mu_{k+1}.$$

Отже, $\mu_n = (n+1)\Delta\mu_n - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta^2\mu_{k+1}$,

звідки і випливають необхідні нерівності.

Далі розглянемо наступні величини:

1. $D_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l_1+l_1=k}\gamma_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2$.

Відомо [6] що,

$$D_n(x_1,x_2) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}(x_1-x_2)\sin\frac{n+1}{2}(x_1+x_2) + \sin\frac{n}{2}(x_1-x_2)\sin\frac{n}{2}(x_1+x_2)}{\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

2. $F_n(x_1,x_2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x_1,x_2)$.

Провівши елементарні перетворення, отримаємо

$$F_n(x_1,x_2)=\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_1+x_2}{2}}\left(\frac{\sin(n+1)x_2\cos\frac{x_2}{2}}{\sin\frac{x_2}{2}}-\frac{\sin(n+1)x_1\cos\frac{x_1}{2}}{\sin\frac{x_1}{2}}\right).$$

Крім того, відомо [7]

$$\iint\limits_{[-\pi,\pi]^2}\left|F_n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2=O(1). \tag{0.5}$$

3. $V_k^n(x_1,x_2)=\frac{1}{k}\sum\limits_{m=n-k+1}^{n}D_m(x_1,x_2)$

Відомо [8]

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{[-\pi,\pi]^2}\left|V_k^n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2=\frac{16}{\pi^4}\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)+O\left(\ln\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\right) \tag{0.6}$$

При $k=\left[\frac{n}{2}\right]-1;\left[\frac{n}{2}\right];\left[\frac{n}{2}\right]+1;\left[\frac{n}{2}\right]+2$

$$\iint\limits_{[-\pi,\pi]^2}\left|V_k^n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2=O(1). \tag{0.7}$$

Справді, підставивши у (0.7) $k=\left[\frac{n}{2}\right]-1;\left[\frac{n}{2}\right];\left[\frac{n}{2}\right]+1;\left[\frac{n}{2}\right]+2$, отримаємо потрібний результат.

На основі цих тверджень можна довести теорему 1.

Доведення теореми 1. Зробимо перетворення Абеля, врахувавши $D_{-1}(x_1,x_2)=0$ та $\mu_0^{(n)}=0$, матимемо

$$K_n(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{n-k}^{(n)}\sum_{l_1+l_1=k}\gamma_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}\sum_{l_1+l_1=n-k}\gamma_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}\left(D_{n-k}(x_1,x_2)-D_{n-k-1}(x_1,x_2)\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2)-\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}D_{n-k-1}(x_1,x_2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2)-\sum_{k=2}^{n+1}\mu_{k-1}^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2)-\sum_{k=1}^{n}\mu_{k-1}^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2).$$

Виразивши $D_k(x_1,x_2)$ через $V_k^n(x_1,x_2)$ та застосувавши перетворення Абеля ще раз отримаємо

$$K_n(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}D_{n-k}(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}\left((k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)-kV_k^n(x_1,x_2)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)-\sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}kV_k^n(x_1,x_2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Delta\mu_k^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\mu_{k+1}^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)=$$

$$=\Delta\mu_n^{(n)}(n+1)V_{n+1}^n(x_1,x_2)+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\mu_k^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\mu_{k+1}^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)=$$

$$=\Delta\mu_n^{(n)}(n+1)V_{n+1}^n(x_1,x_2)-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_{k+1}^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2).$$

Враховуючи результати (0.4) та (0.6), маємо

$$\iint_{[0,\pi]^2}\left|K_n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2=\iint_{[0,\pi]^2}\left|\Delta\mu_n^{(n)}(n+1)V_{n+1}^n(x_1,x_2)-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_{k+1}^{(n)}(k+1)V_{k+1}^n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2\le$$

$$\le\Delta\mu_n^{n}(n+1)\iint_{T^2}\left|V_{n+1}^n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\mu_{k+1}^{n}\right|(k+1)\iint_{T^2}\left|V_{k+1}^n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2$$

$$\le O(\mu_n^{(n)})+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\mu_{k+1}^{(n)}\right|(k+1)\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)+O\left(\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\mu_{k+1}^{(n)}\right|(k+1)\ln\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\right)\qquad(1.8)$$

Застосуємо до сум в останній рівності перетворення Абеля:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\mu_{k+1}^{(n)}\right|(k+1)\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{k}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)-\sum_{m=0}^{k-1}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)\right)\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\sum_{m=0}^{k}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)-\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\sum_{m=0}^{k-1}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\sum_{m=0}^{k}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)-\sum_{k=-1}^{n-2}\ln^2\left(\frac{n+1}{k+2}+1\right)\sum_{m=0}^{k}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)=$$

$$=\ln^2\left(\frac{n+1}{n}+1\right)\sum_{m=0}^{n-1}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\ln^2\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)-\ln^2\left(\frac{n+1}{k+2}+1\right)\right)\sum_{m=0}^{k}\left|\Delta^2\mu_{m+1}^{(n)}\right|(m+1)\le$$

$$\le C\mu_n^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2}\mu_{k+1}^{(n)}\ln\frac{\frac{n+1}{k+1}+1}{\frac{n+1}{k+2}+1}\ln\left(\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\left(\frac{n+1}{k+2}+1\right)\right)\le$$

$$\le C\mu_n^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\mu_{k+1}^{(n)}}{k+1}\ln\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right).$$

Зробивши аналогічні перетворення над сумою

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\mu_{k+1}^{(n)}\right| \;\; k+1 \;\; \ln\left(\frac{n+1}{k+1}+1\right)\le C_1\mu_n^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\mu_{k+1}^{(n)}}{k+1}.$$

Підставивши отримані результати до (1.8), матимемо

$$\iint\limits_{0,\pi\;\;^2}\left|K_n(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2=\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mu_k^{(n)}}{k}\ln\left(\frac{n+1}{k}+1\right)+C_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mu_k^{(n)}}{k}+C_2\mu_n^{(n)}.$$

Теорему доведено.

Висновки. В роботі отримано оцінку інтеграла від модуля тригонометричного многочлена від двох змінних в термінах його коефіцієнтів, отримані результати використовуються при встановленні факту інтегровності.

Список літератури

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. / Н.К. Бари – М.: Физматгиз, 1961. – 948с.
2. Стечкин С.Б., К проблеме множителей для тригонометрических полиномов, Докл. АН СССР, 1950, Т. 75, №2, С. 165-168
3. Ефимов А.В., О линейных методах суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 743-756.
4. Теляковский С.А., О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов фурье. II, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 27 (1963), 253-272.
5. Задерей П.В., Задерей Н.Н., О нормах тригонометрических полиномов двух переменных и оценки коефициентов Фурье-Хаара на классах дифферецируемых функций многих переменных: препринт 83.67 – Киев: Институт математики АН УССР, 1983. – 42 с.
6. Даугавет И.К. О постоянных Лебега для двойных рядов Фурье // В кн. Методы вычислений. Вып.6. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1970. С. 8-13.
7. Подкорытов А.Н. Средние Фейера в двухмерном случае, Вестник ЛГУ, 1978, №13
8. Скопина М.А., Константы Лебега кратных сумм Валле-Пуссена по многогранникам, Зап. науч. семин. ЛОМИ 125 (1983), 154-165.