УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ БІРЯДНІ КІЛЬЦЯ

Лісовий Володимир

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Яременко Ю.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Абстрактні, формальні і аксіоматичні напрямки, яким алгебра зобов'язана своїм новим піднесенням, привело до появи нових понять і в результаті виникнення різних теорій, серед яких і теорія кілець.

В статті розглядаються основні поняття теорії напівдосконалих кілець та модулів над ними, та основні леми і теореми, що безпосередньо стосуються теорії бірядних кілець, які є узагальненням напівланцюгових кілець. Розглянуто сагайдаки нетерових бірядних кілець. Описано клас нетерових бірядних кілець, одиниця яких розкладається в суму двох та трьох локальних ідемпотентів, базовий сагайдак яких – неорієнтований ланцюг.

Ключові слова: кільця, пірсовський розклад, модуль, сагайдак.

Noetherian biserial rings

V. Lisoviy

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent of mathematics chair Yaremenko Y.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

Abstract, formal and axiomatic directions, which algebra owes its new rise, hawe led to the emergence of new concepts and as a result of the emergence of various theories, including the theory of rings.

The article deals with the basic notions of the theory of semiperfect rings and modules above them, and the basic lemmas and theorems directly related to the theory of biserial rings, which are generalizations of the serial rings. There had been considered the quivers noetherian biserial rings. A class of noetherian biserial rings was described, whose unit is decomposing into the sum of two and three local idempotents, the base quiver of which is a non-oriented chain.

Key words: rings, peirce decomposition, module, quiver.

Постановка проблеми. Вказати структуру нетерових бірядних кілець, базовий сагайдак яких – неорієнтований ланцюг.

Аналіз досліджень і публікацій. Поняття артинового бірядного кільця ввів Фуллер у роботі [11]. Цей клас кілець включає артинові напівланцюгові кільця і артинові кільця дистрибутивного модульного типу. У роботі [5] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця, а у роботі [6] вказана будова спадкових, напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей. В [7; 10, 83] вивчаються властивості нетерових бірядних кілець.

Мета статті – описати клас нетерових бірядних кілець, одиниця яких розкладається в суму двох та трьох локальних ідемпотентів, базовий сагайдак яких – неорієнтований ланцюг.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Нехай A асоціативне кільце з $1\neq 0$.

Підгрупа I адитивної групи кільця A називається *правим (лівим) ідеалом кільця A*, якщо для будь-якого $i\in I$ і будь-якого $a\in A$ виконується $ia \in I$ $(ai \in I)$.

Підгрупа I, яка є одночасно і правим і лівим ідеалом, називається *двостороннім ідеалом кільця A* або просто *ідеалом*.

Адитивна абелева група M називається *правим A-модулем*, якщо кожній парі (m,a) , де $m\in M$, а $a\in A$ співставлений однозначно певний елемент $ma\in M$, причому

1. $m(a_1+a_2)=ma_1+ma_2$,;
2. $(m_1+m_2)a=m_1a+m_2a$;
3. $m(a_1a_2)=(ma_1)a_2$;
4. $m * 1=m$;

для будь-яких $m,m_1,m_2\in M$ і будь-яких $a,a_1,a_2\in A$.

Аналогічно можна визначити поняття лівого A-модуля. Якщо A – поле, то A-модуль є векторним простором.

Велике значення в структурній теорії кілець має те, що кільце можна розглядати як модуль над собою. Тоді праві (ліві) підмодулі кільця – це не що інше як праві (ліві) ідеали.

Елемент $e^2=e\in A$ називається і*демпотентом*. Два ідемпотенти e і f

називаються *ортогональними*, якщо $ef=fe=0$.

Рівність $1=e_1+\ldots+e_n$, де $e_1,\ldots,e_n$ – ідемпотенти кільця A, будемо називати розкладом одиниці кільця A.

Твердження 1 [3, 9]. *Якщо $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A , то $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_iA$ $(A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ –розклад кільця A в пряму суму правих (лівих) ідеалів e_iA (Ae_i).*

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A і $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} e_iae_j$. Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n)$. Елементи із e_iAe_j ми будемо позначати через a_{ij}. Тоді будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}). Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_2 & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_t \end{bmatrix}$$

Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* [1, 31].

Ненульовий модуль M називається *простим*, якщо у нього рівно два підмодулі (він сам і нульовий підмодуль).

Кільце називається *простим*, якщо в ньому немає відмінних від нуля двосторонніх ідеалів.

Модуль M називається *напівпростим*, якщо він розпадається в пряму суму простих модулів.

Кільце A називається *напівпростим справа*, якщо воно напівпросте як правий модуль над собою.

Теорема 1 [8, 108] (Веддербарна-Артина).

Наступні умови рівносильні для кільця A:

(1) кільце A напівпросте справа;

(2) кільце A ізоморфне прямому добутку повних матричних кілець над деякими тілами;

(3) кільце A напівпросте зліва.

Модуль *M* називається *дистрибутивним,* якщо для будь-яких підмодулів *K, L, N* справедлива рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Цоколем модуля називається сума всіх мінімальних підмодулів цього модуля, тобто сума всіх його простих підмодулів.

Модуль *P* називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля *M* на модуль *N* (φ: $M \to N$) і для будь-якого гомоморфізму ψ: $P \to N$ існує гомоморфізм h: $P \to M$ такий, що $\psi = \varphi h$.

Важливу роль в теорії кілець і модулів відіграють умови скінченності, зокрема, умови обриву ланцюжків підмодулів та односторонніх ідеалів.

Модуль *M* називається *артиновим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить мінімальний елемент.

Модуль *M* називається *нетеровим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний елемент.

Твердження 2 [10, 18]. *Модуль M є нетеровим (артиновим) тоді і лише тоді, коли кожен зростаючий (спадаючий) ланцюжок його підмодулів стабілізується.*

Нехай *M* – артиновий модуль. Тоді, очевидно, будь-який його підмодуль *N* – артиновий і фактор-модуль *M/N* також артиновий. Аналогічно, для нетерового модуля.

Кільце *A* називається *артиновим (нетеровим) справа,* якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Напівпросте справа кільце артинове і нетерове справа. За теоремою Веддербарна-Артина воно також артинове і нетерове зліва.

Кільце цілих чисел є нетеровим, але не артиновим.

Теорема 2 [3, 48]. *Якщо кільце A нетерове (артинове) справа, то кільця* *eAe і fAf – нетерові, (артинові) справа, fAf - модуль eAf та eAe - модуль fAe – скінченнопороджені. Навпаки, якщо ці умови виконуються для деяких ідемпотентів e і f∈A таких, що e+f=1, то кільце A – нетерове (артинове) справа.*

Важливу роль в теорії кілець грає поняття радикала Джекобсона.

Радикалом Джекобсона R кільця A називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Кільце *A* називається *локальним*, якщо у нього всього один максимальний правий ідеал.

В цьому випадку цей ідеал є радикалом Джекобсона *R* кільця *A.* Тому у кільця *A* всього один максимальний лівий ідеал.

Кільце *A* називається *напівлокальним*, якщо факторкільце $\bar{A}=A/R$ артинове справа.

Ідемпотент $e\in A$ називається *локальним,* якщо кільце *eAe* локальне.

Твердження 3. *Нехай R – радикал Джекобсона локального кільця* $\mathcal{O}$*, X – ланцюговий* $\mathcal{O}$*-модуль і включення* $XR\subset X$ *строге. Тоді X – циклічний* $\mathcal{O}$*-модуль.*

Ідемпотенти можна піднімати за модулем ідеала I, якщо з того, що $q^2-q\in I$ $(q\in A)$, випливає існування ідемпотента $e^2=e\in A$ такого, що $e-q\in I$.

Напівлокальне кільце *A* називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона *R* кільця *A* [8, 120].

Теорема 3 [12]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли його одиниця розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів*.

Підмодуль *N* модуля *M* називається *косуттєвим*, якщо з рівності *N+X=M* слідує, що *X=M* для довільного підмодуля *X* модуля *M*.

Проективний модуль *P=P(M)* називається *проективним накриттям* модуля *M*, якщо існує епіморфізм $\varphi: P\to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ – косуттєвий підмодуль в *P*.

Нехай *A* – нетерове справа напівдосконале кільце, *R* – його радикал Джекобсона, P_1, …, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Тоді проективне накриття $P(P_iR)$ модуля P_iR має вигляд: $P(P_iR)=\bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}$, ($i,j$ = 1, …, s). Співставимо модулям P_1, …, P_s вершини (точки) 1, …, s і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерова справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q(A)$.

Аналогічно визначається лівий сагайдак $Q'(A)$ нетерова зліва напівдосконалого кільця A.

Теорема 4 [3, 50]. *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетерового кільця A:*

(1) A нерозкладне в прямий добуток кілець;

(2) A/R^2 нерозкладне в прямий добуток кілець;

(3) сагайдак кільця A зв'язний.

Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів лінійно впорядкована.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем.*

Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно являється напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Нерозкладний модуль M називається *бірядним*, якщо він (тобто структура його підмодулів) дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулю) такі, що K_1+K_2 є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ є нуль або найменший ненульовий підмодуль в M [4].

Напівдосконале кільце A називається *бірядним*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A-модуль бірядний [4].

Теорема 5 [4]. *Нехай e – довільний ідемпотент бірядного кільця A. Тоді eAe являється бірядним кільцем.*

Теорема 6 [6]. *Нехай A – нетерове бірядне кільце. Тоді з кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок і в кожну точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому з однієї точки в іншу (можливо й співпадаючу з першою) йде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо* *є скінченний граф,який задовольняє і умови, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

Твердження 4 [6]. *Для нетерових кілець єдиний правий максимальний* A_{jj} *- підмодуль в* A_{ij} *співпадає з єдиним лівим максимальним* A_{ii} *- підмодулем в* A_{ij}.

Твердження 5 [6]. *Лівий сагайдак нетерового бірядного кільця отримується із правого сагайдака переворотом усіх стрілок.*

Лема 1 [6]. *Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий*.

Якщо в сагайдаку відкинути петлі, то він називається *базовим*.

Побудуємо всі можливі сагайдаки *Q,* які мають своїм базовим сагайдаком неорієнтований ланцюг, побудований на двох точках. Враховуючи теорему 6 отримаємо чотири сагайдаки (з точністю до перенумерації вершин):

1) $\{\bullet \longrightarrow \bullet\}$; 2) $\{\bullet \longrightarrow \overset{\circlearrowleft}{\bullet}\}$; 3) $\{\overset{\circlearrowleft}{\bullet} \longrightarrow \bullet\}$; 4) $\{\overset{\circlearrowleft}{\bullet} \longrightarrow \overset{\circlearrowleft}{\bullet}\}$.

Вкажемо структуру нетерових бірядних кілець з такими сагайдаками. Двосторонній пірсовський розклад кільця *B*, сагайдак якого побудований на двох точках, матиме вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}, \text{ радикал Джекобсона такого кільця } R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix};$$

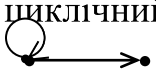
Знайдемо $R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + XY & R_1X + XR_2 \\ YR_1 + R_2Y & R_2^2 + YX \end{pmatrix}.$

Тут згідно з теоремами 2 та 6.1[4], кільця B_1 і B_2 є або однорядними кільцями Кете (ланцюговими артиновими кільцями), або дискретно нормованими кільцями, взагалі кажучи, некомутативними (локальними областями головних правих і головних лівих ідеалів), *X* – ланцюговий правий B_2-модуль і ланцюговий лівий B_1-модуль, а *Y* – ланцюговий правий B_1-модуль і ланцюговий лівий B_2-модуль.

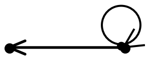
Випадок 1. $Q(B) = \{\bullet \longrightarrow \bullet\}$.

Так як із другої точки не виходить стрілка, то правий головний *B*-модуль

$P_2=(Y_1\ \ R_2)$, що відповідає цій точці, простий тому $Y = 0$, $R_2 = 0$. Якщо радикал Джекобсона кільця рівний нулю, то це кільце є тілом. Отже $B_2= D$. Із першої точки виходить одна стрілка, то згідно леми 1 правий головний B-модуль $P_1=(R_1\ \ X)$ – ланцюговий. Отримаємо $R_1 = YX = 0$ і $B_1 = D$. Легко бачити, що в цьому випадку кільце $B=\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ізоморфне кільцю $T_2(D)$ верхніх трикутних матриць другого порядку над тілом D. Кільце $T_2(D)$ – це артинове спадкове напівланцюгове кільце.

Випадок 2. $Q(B)$ = {  }.

Згідно твердження 5 лівий сагайдак $Q'(B)$ має вигляд:

$Q'(B)$ = {  }. Так як із першої точки сагайдака $Q'(B)$ не виходить стрілка, то лівий головний B-модуль $Q_1=\begin{pmatrix} R_1 \\ Y \end{pmatrix}$ простий, звідки $R_1 = 0$ і $Y = 0$. За твердженням 3, X – циклічний правий B_2-модуль, отже $B=\begin{pmatrix} D & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ нетерове з двох сторін і згідно твердження 4 $XR_2 = R_1X = 0$, $R_2 \neq 0$. Цоколь кільця B відмінний від нуля.

Випадок 3. $Q(B)$ = { }.

Так як із другої точки не виходить стрілка, то головний модуль $P_2 = (Y_1\ \ R_2)$, що відповідає цій точці, простий. Тому $Y=0$ та $R_2=0$, тобто $B_2 = D$ – тіло. За твердженням 3 X – циклічний лівий B_1-модуль, звідки B нетерове з двох сторін, отже $R_1 \neq 0$. Так як B − нетерове, то згідно твердження 4 $R_1X=XR_2=0$. Маємо $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & D \end{pmatrix}$. В цьому випадку цоколь кільця B також відмінний від нуля.

Випадок 4. $Q(B)$ = {  }.

В даному випадку $Y = 0$, так як у противному $Y = R_2Y$, що суперечить нетеровості кільця B_2. Отримаємо кільце $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ O & B_2 \end{pmatrix}$, де $R_1X = XR_2$. Цоколь кільця B відмінний від нуля.

Аналогічно описана структура нетерових бірядних кілець A, які мають своїм базовим сагайдаком неорієнтований ланцюг і складаються із трьох точок. Враховуючи теорему 6 можна побудувати, з точністю до перенумерації вершин, 14 сагайдаків, а отже отримаємо 14 нетерових бірядних кілець, двосторонній пірсовський розклад яких в загальному випадку має вигляд: $A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $\vartheta_i = e_i A e_i \; (i = 1,2,3)$ – за теоремами 2 та 6.1[4], дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{ij} – ланцюговий лівий ϑ_i - модуль і ланцюговий правий ϑ_j - модуль.

Як отримали двосторонній пірсовський розклад кілець за їх сагайдаками, покажемо на прикладі сагайдака : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[loop above] \arrow[r] & 3 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$.

Так як у вершину 1 сагайдака не входить стрілка, то лівий головний A-модуль $Q_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}$ – простий, тому його радикал $RQ_1 = \begin{pmatrix} R_1 \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = 0$, отже $A_{21} = 0, A_{31} = 0, \vartheta_1 = D_1$ – тіло (так як радикал Джекобсона кільця ϑ_1 рівний нулю, то це кільце – тіло).

Із вершини 3 виходить одна стрілка, тому згідно леми 1 правий головний A-модуль $P_3 = (A_{31}\ A_{32}\ \vartheta_3)$ – ланцюговий, причому, із сказаного вище $A_{31} = 0$. Кожній стрілці σ_{ij} відповідає гомоморфізм φ_{ij}: $P_j \to P_i$, тобто підмодуль $Im\varphi_{ij}$, який має рівно один максимальний підмодуль і $Im\varphi_{ij}/(Im\varphi_{ij})R = U_i$ – простий модуль.

Розглянемо модуль P_3. $P_3 R = (0\ A_{32}\ R_3), P_3R^2 = (0\ \ A_{32}R_2 + R_2A_{23}\ \ A_{32}A_{23} + R_3^2)$. Так як в точці 3 є петля, то $R_3 \neq 0$ і $R_3 \supset A_{32}A_{23}$. Так як кільце нетерове то за твердженням 4 $A_{32}R_2 = R_2A_{23}$ і $A_{32} \supset A_{32}R_2$. Якщо $A_{32} \neq 0$, то $P_3R/P_3R^2 = U_2 + U_3$, що суперечить тому, що P_3 – ланцюговий модуль. Отже, $A_{32} = 0$.

Отримали кільце вигляду $\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}$.

Розглянемо правий головний A-модуль P_1. Із вершини 1 виходить одна стрілка, тому модуль $P_1=(D_1 \quad A_{12} \quad A_{13})$ – ланцюговий.

$P_1R^2=(0 \quad A_{12}R_2 \quad A_{12}A_{23}+A_{13}R_3)$, причому $A_{12} \supset A_{12}R_2$ і $A_{13} \supset A_{13}R_3$. Тому $A_{13} = A_{12}A_{23}$, так як у противному випадку $P_1R/P_1R^2=U_2+U_3$, що суперечить тому, що P_1 – ланцюговий. Отже, у розглянутому кільці обов'язкова умова $A_{13} = A_{12}A_{23}$.

У отриманому кільці A_{12} – одновимірний лівий D_1 - простір і одновимірний правий ϑ_2/R_2 - простір, A_{13} – одновимірний лівий D_1 - простір і одновимірний правий ϑ_3/R_3 - простір, A_{23} – одновимірний лівий ϑ_2/R_2 - простір і одновимірний правий ϑ_3/R_3 - простір.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Із вигляду отриманих кілець робимо висновок, що всі вони, при відповідній нумерації вершин їх сагайдаків, мають верхній трикутний вигляд, причому точкам з петлями відповідають дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, а точкам без петель відповідають тіла.

Список літератури

1. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
2. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
3. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
4. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // К., 1975. – 58 с. – (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).
5. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
6. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 35-74.
7. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.

8. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
9. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. – М.: Мир, 1986. – 426 с.
10. Яременко Ю.В. Кільця та модулі – Кіровоград, 2017. – 187 с.
11. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
12. Muller B.J. On semi-perfect rings // Illinois J.Math. – 1970. – V. 14, № 3. – P. 464-467.