УДК 519.5

ОЦІНКА КОНСТАНТИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ЯДРА ДІРІХЛЕ ТРИКУТНОГО ВИДУ

Коробка Ольга

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук Гаєвський М.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В роботі отримано оцінку константи Лебега для ядра Діріхле трикутного виду.

Ключові слова: ряд Фур'є, функція двох змінних, константа Лебега, ядро Діріхле.

In this paper we obtain an estimate of the Lebesgue constant for the Dirichlet kernel of a triangular type.

Keywords: Fourier series, function of two variables, Lebesgue constant, Dirichlet kernel.

Постановка проблеми. Нехай дано функцію $f(x_1,x_2)\in C(0..2\pi)$ та $S[f]$ – її ряд Фур'є

$$S[f]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1x_1}e^{il_2x_2}$$

Нехай, далі

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}a_k\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1x_1}e^{il_2x_2}$ є рядом Фур'є деякої функції $\varphi(x_1,x_2)$, де $\psi(k)$ деяка послідовність натурального аргументу. Функцію $\varphi(x_1,x_2)$ можна назвати $\psi(k)$-похідною функції $f(x_1,x_2)$, а множину функцій, для яких виконується така умова позначимо через C^{ψ}; а якщо на функцію $\varphi(x_1,x_2)$ накладемо умову $\|\varphi\|_p\le 1,\ p\in[1..\infty)$, то множину таких функцій позначимо через C^{ψ}_{∞};

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1x_1}e^{il_2x_2}$ є рядом Фур'є деякої функції $D_{\psi}(x_1,x_2)$.

В теорії функцій дійсної змінної важливою задачею є отримання на різних класах функцій нерівностей типу Лебега, що пов'язують величину відхилення від функції її сум Фур'є та величини найкращого наближення за тригонометричною системою функцій тощо.

Аналіз досліджень і публікацій. Цими задачами займались такі математики як М.С. Нікольський, С.Б. Стєчкін, В.К. Дзядик, О.І. Степанець, Р.М. Тригуб, С.О. Теляковський та інші. З найбільш повним оглядом результатів можна ознайомитися у роботах [1-4]. В [5] отримано подібні результати для дійснозначних функцій.

Мета статті. В даній роботі отримаємо оцінку константи Лебега сум Фур'є на класі C_{∞}^{ψ}, дані оцінки є необхідними для отримання нерівностей типу Лебега.

Виклад основних результатів дослідження. Покажемо, що кожну функцію з класу C^{ψ} можна представити у вигляді згортки

$$f(x_1,x_2)=a_0+\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\varphi(x_1-t_1,x_2-t_2)D_{\psi}(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

де T^2 – квадрат зі стороною 2π.

Нехай дано функцію $f(x_1,x_2)\in C(0..2\pi)$ та

$$S[f]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1x_1}e^{il_2x_2} \text{ – її ряд Фур'є.}$$

Цю функцію можна подати у вигляді згортки

$$f(x_1,x_2)=a_0+\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\varphi(x_1-t_1,x_2-t_2)D_{\psi}(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

де T^2 – квадрат зі стороною 2π, $\varphi(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}a_k\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1x_1}e^{il_2x_2}$,

$$D_{\psi}(t_1,t_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1x_1}e^{il_2x_2}.$$

Функцію $D_{\psi}(t_1,t_2)$ називають ядром сумування даного методу.

Знайдемо константу Лебега.

$$I_1=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}|D_{n-1}(t_1,t_2)|dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l_1+l_2=k}e^{il_1t_1}e^{il_2t_2}\right|dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l_1=0}^{k}e^{il_1t_1}e^{i(k-l_1)t_2}\right|dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l_1=0}^{k}e^{il_1t_1}e^{i(k-l_1)t_2}\right|dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}e^{kt_2}\sum_{l_1=0}^{k}e^{il_1(t_1-t_2)}\right|dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}e^{kt_2}\frac{1-e^{i(k+1)(t_1-t_2)}}{1-e^{i(t_1-t_2)}}\right|dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{ikt_2}-e^{i(k+1)t_1}e^{-it_2}}{1-e^{i(t_1-t_2)}}\right|dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(k+1)t_2}-e^{i(k+1)t_1}}{e^{it_2}-e^{it_1}}\right|dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\frac{1}{\left|e^{it_2}-e^{it_1}\right|}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i(k+1)t_2}-e^{i(k+1)t_1})\right|dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T^2}\frac{1}{\left|e^{it_2}-e^{it_1}\right|}\left|\sum_{k=0}^{n}(e^{ikt_2}-e^{ikt_1})\right|dt_1dt_2=$$

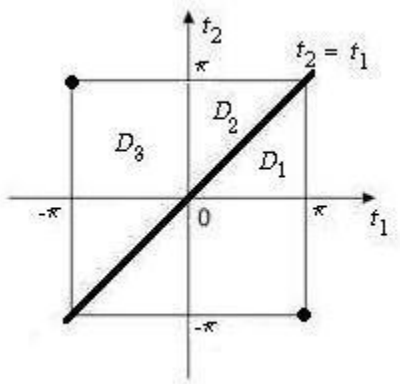
$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{T^2} \frac{1}{\left|e^{it_2} - e^{it_1}\right|} \left|D_n(t_2) - D_n(t_1)\right| dt_1 dt_2 = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{T^2} \frac{1}{\left|2\sin\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)\right|} \left|D_n(t_2) - D_n(t_1)\right| dt_1 dt_2 .$$

Розглянемо, як веде себе функція $f(t_1, t_2) = \frac{1}{\left|2\sin\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)\right|} \left|D_n(t_2) - D_n(t_1)\right|$ в області інтегрування T^2. Мають місце наступні властивості:

1. $f(t_1, t_2) = f(-t_1, -t_2)$;
2. $f(-t_1, t_2) = f(t_1, -t_2)$;
3. $f(t_1 + 2k\pi, t_2 + 2m\pi) = f(t_1, t_2),\ k, m \in Z$.

Для доведення цих властивостей досить згадати, що $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$ і $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Крім того, в області інтегрування T^2 можна виділити критичні точки, в околі яких $\sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \to 0$. Це множина точок, в яких $\left|t_1 - t_2\right| \to 0$, а також околи точок $(-\pi, \pi)$ та $(\pi, -\pi)$. Врахувавши періодичність функції, можемо показати, що $f(-\pi, \pi) = f(\pi, \pi)$ і $f(\pi, -\pi) = f(\pi, \pi)$.



Тому

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2} \left(\iint_{D_1} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \iint_{D_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \iint_{D_3} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \iint_{\left|t_2 - t_1\right| \le \delta} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \iint_{\left|t_2 - t_1\right| \le 2\pi - \delta} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \alpha_1(t_1, t_2) + \alpha_2(t_1, t_2) + \alpha_3(t_1, t_2) + \alpha_4(t_1, t_2) + \alpha_5(t_1, t_2) ,$$

де $D_1 = \left\{(t_1,t_2) \,|\, t_1 \in (\delta,\pi], t_2 < t_1 - \delta\right\}$, $D_2 = \left\{(t_1,t_2) \,|\, t_2 \in (0,\pi-\delta], t_2 > t_1 + \delta\right\}$, $D_3 = \left\{(t_1,t_2) \,|\, t_2 \in [-\pi,0],[0,\pi]\right\} \setminus \left\{(t_1,t_2) \,|\, |t_2 - t_1| \le \delta \text{ і } |t_2 - t_1| \le 2\pi - \delta\right\}$. δ можна вважати не більшим за $\dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

У зв'язку з періодичністю підінтегральної функції, відмітимо, що область інтегрування інтегралу α_5 є підмножиною області інтегрування інтегралу α_4.

Тому оцінимо ці інтеграли

$$\alpha_4 = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{|t_2 - t_1| \le \delta} f(t_1,t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{|t_2 - t_1| \le \delta} \frac{1}{\left|2\sin\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)\right|} \left|D_n(t_2) - D_n(t_1)\right| dt_1 dt_2 \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{|t_2 - t_1| \le \delta} \frac{1}{\left|2\,\frac{2(t_2 - t_1)}{2\pi}\right|} \left|D_n(t_2) - D_n(t_1)\right| dt_1 dt_2 = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|t_2 - t_1| \le \delta} \left|\frac{D_n(t_2) - D_n(t_1)}{t_2 - t_1}\right| dt_1 dt_2 .$$

Зробимо в нашому інтегралі наступні заміни

$$t_1 = x,\ t_2 = t_1 + h,$$
$$x = t_1,\ h = t_2 - t_1,$$
$$P = \{(x,h) \,|\, x \in [0,\pi],\ h \in [-\delta,\delta]\}.$$

Якобіан даного перетворення $J(x,h)$ дорівнює одиниці, тому перетворення області $|t_2 - t_1| \le \delta$ в область P буде взаємно однозначним.

Маємо інтеграл

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{P} \left|\frac{D_n(x+h) - D_n(x)}{h}\right| dxdh .$$

На основі теореми Лагранжа його можна записати у вигляді

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{P} \left|D_n'(x + \theta h)\right| dxdh,$$

де $0 < \theta < 1$.

$$D_n'(x) = \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right)' = \frac{ie^{ix}(1 - e^{i(n+1)x})}{(1 - e^{ix})^2} - \frac{i(n+1)e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} .$$

Розглянемо величину $\left|D_n'(x)\right|$ на проміжках $(0,\delta)$ і $[\delta,\pi]$.

При досить малих $x \le \delta$ можемо записати

$$\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = n + 1 + o(x) .$$

Тоді

$$\left|D_n^{'}(x)\right| = \left|\frac{ie^{ix}(1-e^{i(n+1)x})}{(1-e^{ix})^2} - \frac{i(n+1)e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = \left|\frac{i(n+1)e^{ix}}{1-e^{ix}} - \frac{i(n+1)e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| =$$

$$= \left|\frac{i(n+1)e^{ix}}{1-e^{ix}} - \frac{i(n+1)e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = (n+1)\left|\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = (n+1)\left|\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| < n(n+1)\,.$$

При $x > \delta$

$$\left|D_n^{'}(x)\right| = \left|\frac{ie^{ix}(1-e^{i(n+1)x})}{(1-e^{ix})^2} - \frac{i(n+1)e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{(1-e^{ix})^2}\right| + (n+1)\left|\frac{e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \le \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right| + \frac{n+1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} < \frac{n+1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,.$$

Тоді

$$\frac{1}{4\pi}\iint_P \left|\frac{D_n(x+h)-D_n(x)}{h}\right| dxdh = \frac{1}{4\pi}\iint_P \left|D_n^{'}(x+\theta h)\right| dxdh =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta} dh \int_0^{\delta} \left|D_n^{'}(x+\theta h)\right| dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta} dh \int_{\delta}^{\pi} \left|D_n^{'}(x+\theta h)\right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta} dh \int_0^{\delta} \sup\left|D_n^{'}(x+\theta h)\right| dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta} dh \int_{\delta}^{\pi} \frac{n+1}{\left|\sin\frac{x+\theta h}{2}\right|} dx \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi} 2\delta^2 n(n+1) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta} dh \int_{\delta}^{\pi} \frac{n+1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} dx \le \frac{1}{4\pi} 2\delta^2 n(n+1) + \frac{1}{4\pi} 2\delta\pi(n+1)\int_{\delta}^{\pi}\frac{dx}{x} \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi} 2\delta^2 n(n+1) + \frac{1}{4\pi} 2\delta\pi(n+1)(\ln\pi - \ln\delta)\,.$$

Підставимо $\delta = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$

$$\alpha_4 \le \frac{1}{4\pi} 2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 n(n+1) + \frac{1}{4\pi}\frac{\pi}{2(n+1)} 2\pi(n+1)(\ln\pi - \ln\frac{\pi}{2(n+1)}) <$$

$$< \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}(\ln\pi - \ln\frac{\pi}{2} - \ln\frac{1}{n+1}) = \frac{\pi}{4}\ln(n+1) + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\ln 2\,.$$

Щодо оцінки інтегралу

$$\alpha_5(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{|t_2-t_1|\le 2\pi-\delta}\frac{1}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}\left|D_n(t_2)-D_n(t_1)\right|dt_1dt_2\,,$$

то по аналогії з оцінкою попереднього інтегралу можна показати, що це буде величина порядку $O(1)$ (не більше $\frac{\pi}{8}$).

Обчислимо інтеграл

$$\alpha_1(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_2)-D_n(t_1)\right|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2\le\frac{1}{2\pi^2}\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_1)\right|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2+\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_2)\right|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2\right).$$

Матимемо

$$\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_1)\right|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2\le\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_1)\right|}{\left|2\left(\frac{2(t_2-t_1)}{2\pi}\right)\right|}dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_1)\right|}{\left|t_2-t_1\right|}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_1)\right|}{t_1-t_2}dt_1dt_2\,.$$

Зробимо в нашому інтегралі заміни

$$x=t_1,\ y=t_1-t_2,$$
$$\delta\le t_1\le\pi,$$
$$0\le t_2\le t_1-\delta$$

$$-t_1\le t_2-t_1\le-\delta,$$
$$\delta\le t_2-t_1\le t_1,$$

$$P=\{(x,y)\,|\,\delta\le x\le\pi,\quad \delta\le y\le x\}.$$

З врахуванням підстановок отримали

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{D_1}\frac{\left|D_n(t_1)\right|}{t_1-t_2}dt_1dt_2=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{P}\frac{\left|D_n(x)\right|}{y}dxdy\,.$$

Підінтегральні функції в нас додатні, тому скористаємось наступною властивістю

$$\iint\limits_{P}\left|f(x)\right|dxdy\le\iint\limits_{Q}\left|f(x)\right|dxdy\,,\ \text{якщо}\ P\subset Q.$$

Нехай $Q=\{(x,y)\,|\,x\in[0..\pi],y\in[\delta..\pi]\}$, тоді

$$\frac{1}{4\pi}\iint_P \frac{|D_n(x)|}{y}dxdy \le \frac{1}{4\pi}\iint_Q \frac{|D_n(x)|}{y}dxdy = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}|D_n(x)|dx\int_{\delta}^{\pi}\frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}|D_n(x)|dx\int_{\delta}^{\pi}\frac{dy}{y} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln\pi - \ln\delta\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln\pi - \ln\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln(n+1) + \ln\frac{\pi}{2}\right),$$

де $O(1) < 1{,}8$.

Аналогічно оцінимо і другий інтеграл

$$\frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_1}\frac{|D_n(t_2)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2 \le \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln(n+1) + \ln\frac{\pi}{2}\right),$$

отже,

$$\alpha_1(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_1}\frac{|D_n(t_2)-D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2 \le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln(n+1) + \ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Для обчислення інтегралу

$$\alpha_2(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_2}\frac{|D_n(t_2)-D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2$$

слід провести міркування, аналогічні обчисленню $\alpha_1(t_1,t_2)$, і

$$\alpha_2(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_2}\frac{|D_n(t_2)-D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2 \le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln(n+1) + \ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Обчислимо тепер

$$\alpha_3(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_3}\frac{|D_n(t_2)-D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2 \le \frac{1}{2\pi^2}\left(\iint_{D_3}\frac{|D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2 + \iint_{D_3}\frac{|D_n(t_2)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2\right).$$

В області інтегрування інтеграла відсутні особливі точки, у яких функція необмежено зростає, сам інтеграл можна обчислити шляхом введення нових змінних $x = t_1,\ y = t_2 - t_1$ (якобіан даного перетворення рівний 1, область інтегрування $P = \{(x,y)\,|\,x \in [-\pi..0], y \in [\delta..2\pi-\delta]\}$).

$$\frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_3}\frac{|D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2=\frac{1}{2\pi^2}\iint_{P}\frac{|D_n(x)|}{\left|2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\iint_{P}\frac{|D_n(x)|}{\left|2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right|}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|D_n(x)|dx\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{dy}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\int_{\delta}^{\pi}\frac{dy}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}+\int_{\pi}^{2\pi-\delta}\frac{dy}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\int_{\delta}^{\pi}\frac{dy}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}-\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{dy}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\int_{\delta}^{\pi}\frac{dy}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)\le\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\pi\int_{\delta}^{\pi}\frac{dy}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln y\Big|_{\delta}^{\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln\pi-\ln\delta\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln\pi-\ln\frac{\pi}{2(n+1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Провівши аналогічні міркування отримаємо

$$\iint_{D_3}\frac{|D_n(t_2)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2\le\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже,

$$\alpha_3(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi^2}\iint_{D_3}\frac{|D_n(t_2)-D_n(t_1)|}{\left|2\sin\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)\right|}dt_1dt_2\le\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Тепер для обчислення вихідного інтегралу слід додати отримані результати

$$I_1=\alpha_1(t_1,t_2)+\alpha_2(t_1,t_2)+\alpha_3(t_1,t_2)+\alpha_4(t_1,t_2)+\alpha_5(t_1,t_2)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\ln(n+1)+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}=$$

$$=\frac{\pi+1}{\pi}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\right)\left(\ln(n+1)+\ln\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\ln(n+1)+\frac{\pi}{4}\left(1+\ln 2\right).$$

Висновки. В роботі отримано оцінку для константи Лебега сум Фур'є на класі C_∞^ψ. Встановлено, що швидкість росту оцінки рівна $\ln^2 n$.

Список літератури

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций. / В.К. Дзядык – М.: Наука, 1977. – 510с.
2. А. И. Классификация и приближение периодических функций. / А.И. Степанец – Киев: Наук. думка, 1987. - 268 с.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд – М.: Мир, 1965. – Т.1 -615с., Т.2 -538с.
4. Праці Інституту математики НАН України. Т. 40: Методы теории приближений: В 2 ч./ А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.1 -427с., Ч.2 – 468с.
5. Даугавет И.К. О постоянных Лебега для двойных рядов Фурье // В кн. Методы вычислений. Вып.6. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1970. С. 8-13.