УДК 514.113.6:371

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Оксана Сабурова

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація: *у статті розглянуто методичні особливості розв’язування стереометричних задач на тіла обертання та комбінації геометричних тіл; розглянуто задачі підвищеного рівня, у яких досліджені циліндр, конус, зрізаний конус, куля та інші тіла, які є комбінацією даних; застосовано метод додаткових побудов та використано подібність досліджуваних об’єктів; відмічено позитивний вплив застосовуваних способів розв’язання задач на підвищення освітнього рівня школярів. У статті розглянуто стереометрична задача практичного змісту, у розв’язанні якої використано апарат математичного аналізу; відмічено, що розв’язування таких задач у старшій профільній школі сприяє поглибленню знань школярів з геометрії і може бути використане для підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання та у позакласній роботі.*

Ключові слова: *стереометрична задача, тіла обертання, циліндр, конус, куля, комбінація геометричних тіл.*

METHODICAL PECULIARITIES OF STUDYING IN THE OLD PROFILE SCHOOL

Oksana Saburova

Scientific adviser: candidate of physical and mathematical sciences, associate professor Iziumchenko L.V.

Central Ukrainian State Pedagogical University named after V.Vynnychenko, Kropivnitsky, Ukraine

Summary: *the article deals with the methodical features of solving stereometric problems on the bodies of rotation and the combination of geometric bodies; advanced level problems in which a cylinder, a cone, a cut cone, a sphere, and other bodies are considered as a combination of data; the method of additional constructions is applied and the similarity of the studied objects is used; the positive influence of the applied methods of solving tasks on raising the educational level of schoolchildren was noted. The article deals with the stereometric problem of practical content, in the solution of which the apparatus of mathematical analysis is used; it was noted that solving such tasks in the senior profile school promotes pupils' knowledge in geometry and can be used to prepare students for external independent assessment and in extracurricular work.*

Keywords: *stereometric problem, body of rotation, cylinder, cone, sphere, combination of geometric bodies.*

Постановка проблеми. Сучасне життя насичене стрімкими змінами, які відбуваються в галузях виробництва, економіки, комунікацій, викликані розвитком та впровадженням новітніх технологій. Тому для людини важливою є здатність бути мобільною та швидко зорієнтуватися, вміти бачити проблему, чітко формулювати, всебічно підходити до її розв’язування, здобувати необхідну інформацію тощо. Вивчення геометрії сприяє розвитку цих якостей, оскільки основними завданнями навчання геометрії в школі є розвиток образного, зокрема просторового, мислення; розвиток логічного мислення; формування розуміння відношень між геометричними об’єктами та об’єктами реального світу, вміння застосовувати геометрію для розв’язування практичних задач.

Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що для учнів найскладнішими є стереометричні задачі взагалі і особливо – стереометричні задачі, пов’язані із тілами обертання та комбінаціями геометричних тіл. Про це свідчать підсумки зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які стверджують, що значна кількість учнів навіть не намагаються розв’язати стереометричні задачі.

Мета. Проаналізувати задачі із стереометрії, зокрема, стереометричні задачі на тіла обертання та комбінації геометричних тіл; висвітлити методичні аспекти розв’язування таких задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми впровадження профільного навчання в Україні досліджували І. Акуленко, Г. Бевз, Н. Бібік, Б. Біляк, М. Бурда, О. Губанова, О. Дубинчук, С. Іванова, Л. Липова, І. Лікарчук, Ю. Мальований, С. Максименко, В. Малишев, О. Носова, В. Павлюк, О. Панішева, П. Сікорський, З. Слєпкань та ін. Теоретико-методичні аспекти формування умінь і навичок учнів зображувати просторові геометричні фігури та їх елементи, застосовувати вивчені означення, властивості та методи стереометрії під час розв’язування задач, зокрема прикладного змісту відображено в працях О. Астряба, М. Бескіна, О. Борейка, Г. Владимирського, Г. Глейзера, Я. Гольдберга, В. Гусєва, О. Зеленяка, М. Ігнатенка, Л. Ізюмченко, О. Коломієць, І. Ленчука, В. Лисенко, В. Литвиненка, М. Лоповка, В. Савченка, З. Слєпкань, Н. Тарасенкової, І. Тесленка, В. Швеця та ін.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. У природі, побуті, повсякденному житті, професійній діяльності людина стикається з просторовими геометричними об’єктами: пірамідами, конусами, призмами, кулями, циліндрами та їх комбінаціями. Розділ геометрії, предметом якого є вивчення просторових геометричних фігур, є стереометрія. Навчання стереометрії в старшій школі має на меті сформувати в учнів просторові уявлення, логічне мислення, міцні знання, які випускники зможуть використовувати в житті та майбутній професії.

Для формування в учнів просторових уявлень і розвитку уяви курс стереометрії починають з запровадження понять і аксіом стереометрії. Наступні розділи «Паралельність у просторі» та «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» є підґрунтям для подальшого вивчення стереометрії [1, 2]. При вивченні многогранників і тіл обертання у 11-му класі з’являються задачі з тілами обертання та вписаними (описаними) тілами обертання. У класах з профільним навчанням геометрії після вивчення окремих тіл обертання доцільно розглянути ускладнені завдання, наприклад, такі:

Приклад 1. Зрізаний конус, у якого радіуси основ 1 м і 4 м, і рівновеликий йому циліндр мають одну й ту ж висоту. Чому дорівнює радіус R основи цього циліндра (у м)? У відповідь запишіть R^2. (*Відповідь*: 7).

Приклад 2. Три циліндри, основи яких є концентричними кругами з радіусами, що утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2, мають однакову висоту. Знайдіть відношення об’ємів меншого з циліндрів до більшого. (*Відповідь*: 0, 0625).

Приклад 3. У циліндричній посудині рівень води дорівнює 11 см. У посудину опускають важку кулю, поверхня і об’єм якої виражаються одним числом. Після занурення кулі рівень води піднявся до країв посудини. Знайти висоту посудини (у см), якщо довжина радіуса її основи дорівнює 6 см. (*Відповідь*: 12).

Приклад 4. Трикутник зі сторонами 7 см та $3\sqrt{2}$ см і кутом 45° між ними обертається навколо третьої сторони. Знайдіть об'єм V тіла обертання (у см^3). У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$. (*Відповідь*: 29,4).

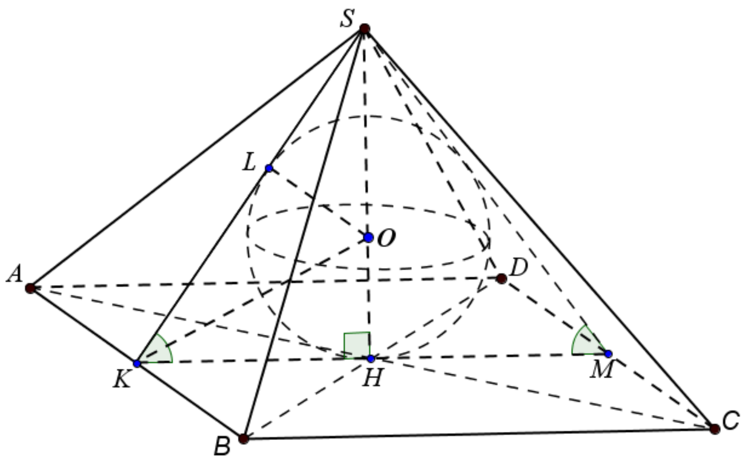
Приклад 5. У зрізаному конусі твірна дорівнює 13 см, а радіуси основ – 1 см і 6 см. Визначте радіус кулі (у см), площа поверхні якої дорівнює половині площі повної поверхні зрізаного конуса. (*Відповідь*: 4).

Приклад 6. (ЗНО, 2014 р.) Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину, паралельну вісі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу 40 $\sqrt{21}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює 200π см^2. (*Відповідь*: 22).

Окремим типом стереометричних задач є задачі на комбінації геометричних тіл, розглянемо приклади таких задач.

Задача 1. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначте об'єм (у см^3) цієї піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює 3 см.

Розв'язання.



Нехай $SABCD$ – дана правильна чотирикутна піраміда, її основа – квадрат

ABCD, вершина *S* проектується в точку *H* перетину діагоналей квадрата, *K*, *M* – середини *AB* і *CD*, відповідно; $KH\perp AB$. Маємо: *SH* – перпендикуляр до площини *ABCD*, проведений із точки *S*, *AB* – пряма площини, *SK* – похила до площини, *KH* – проекція похилої *SK*, яка перпендикулярна до прямої площини ($KH\perp AB$), а тому за ТТП похила *SK* також перпендикулярна до прямої площини, $SK\perp AB$. Маємо два перпендикуляри, поставлені до прямої *AB* у точці *K*, а тому за означенням кута між площинами маємо $\angle SKH=\angle(SAB; ABC)$.

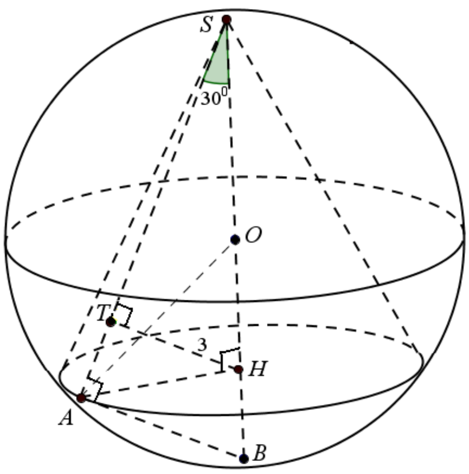
Об'єм піраміди $V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SH$. Куля дотикається до граней *SAD* і *SBC* (рівновіддалена від них), а тому центр кулі *O* лежить на бісекторі двогранного кута, утвореного цими площинами, тобто на *KSM* (можна міркувати інакше, наприклад, використовуючи симетрію правильної чотирикутної піраміди і кулі, *KSM* – площина симетрії для обох тіл). Аналогічно, розглянувши бісектор граней *SAB* і *SCD*, отримаємо, що *O* лежить на бісекторі двогранного кута, утвореного цими площинами. А тому центр кулі лежить на прямій перетину *SH* двох бісекторів. Можна розглядати бісектори інших двогранних кутів: *SAB* і *SBC, SAB* і *SAD, SBC* і *SCD, SCD* і *SDA*, усі вони перетинаються по *SH*.

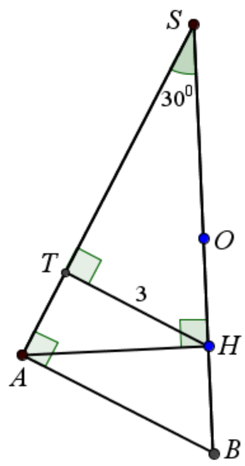
За умовою $\angle SKH=\angle SMH=60^{\circ}$. Тоді $\angle SKM$ – рівносторонній, $OH=3$ см є радіусом вписаного кола в рівносторонній трикутник зі стороною *KM*; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, звідки $a=2\sqrt{3}\cdot r$, або $a=2\sqrt{3}\cdot 3=6\sqrt{3}$ см. *SH* є висотою рівностороннього трикутника, а тому $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (або $h=3r$), звідки отримаємо, що $SH=9$ см. Площа основи $S_{oc.}=a^2$, а тому $S_{oc.}=\left(6\sqrt{3}\right)^2=108$ см^2; об'єм $V=\frac{1}{3}\cdot 108\cdot 9=324$ см^3.

Відповідь: 324 см^3.

Окремим типом задач є тіла обертання, вписані в тіла обертання, наприклад:

Задача 2. У кулю вписано конус, твірна якого утворює з висотою кут 30°. Відомо, що відстань від центра основи конуса до твірної дорівнює 3 см. Визначте площу поверхні кулі у см^2.





Розв'язання. Виконаємо рисунок. Нехай є куля з центром у точці *O*, точки *S* і *B* – точки, які лежать на поверхні кулі (сфері), діаметрально протилежні точки, *SH*, *SA* і *AH* – висота, твірна і радіус конуса, відповідно, *TH* – перпендикуляр з центра основи конуса до твірної, *TH*=3 см. Точка *A* лежить на сфері, *SB* – діаметр, а тому $\angle SAB$ – прямий.

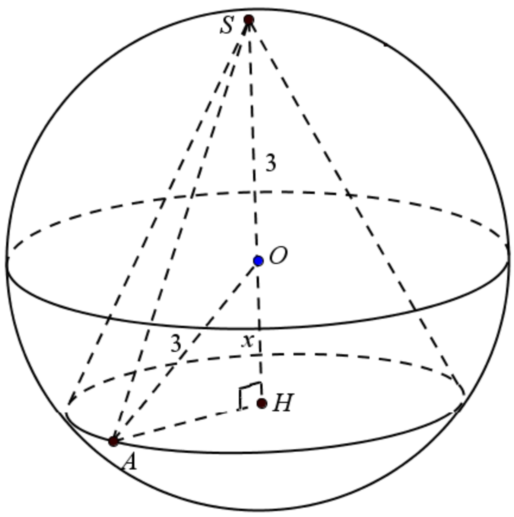
З прямокутного ΔSTH: $SH = \dfrac{TH}{\sin TSH} = \dfrac{3}{0,5} = 6$ см, $ST = TH \cdot ctgTSH = 3\sqrt{3}$ см. З подібності $\Delta STH \cong \Delta SHA$: $\dfrac{ST}{SH} = \dfrac{SH}{SA}$, звідки $SA = \dfrac{SH^2}{ST} = \dfrac{6^2}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ см. З подібності $\Delta STH \cong \Delta SAB$: $\dfrac{ST}{SA} = \dfrac{SH}{SB}$, звідки $SB = \dfrac{SA \cdot SH}{ST} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 6}{3\sqrt{3}} = 8$ см (діаметр кулі), а тоді $R = SO = 4$ см. А тоді площа поверхні кулі $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ см^2.

Відповідь: площа сфери 64π см^2.

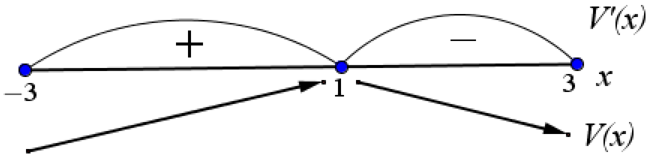
Наступна задача відноситься до інтегративних задач, які знаходяться на стикові стереометрії, алгебри та математичного аналізу:

Задача 3. У кулю радіуса 3 см вписано конус. При якій довжині висоти конуса об'єм конуса буде найбільшим? Чому дорівнює цей об'єм?

Розв'язання. Виконаємо рисунок. Нехай є куля з центром у точці *O*, *SO*=*OA* =3 см, *SH* і *AH* – висота і радіус конуса. Позначимо *OH* через *x*, тоді висота конуса *SH* =3+*x*. Зауважимо, що *x* може набувати від'ємних значень, тобто висота конуса може бути меншою за 3 см.



Виразимо радіус основи конуса: $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}$, або $AH=\sqrt{9-x^2}$. Об'єм запишеться $V=\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot SH$ або $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(9-x^2\right)\cdot\left(3+x\right)$, після розкриття дужок отримаємо, що $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(-x^3-3x^2+9x+27\right)$. Необхідною умовою екстремуму є рівність нулю похідної; обчислимо похідну: $V'=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(-3x^2-6x+9\right)=-\pi\cdot\left(x^2+2x-3\right)$, похідна дорівнює нулю при $x=-3,\ x=1$:

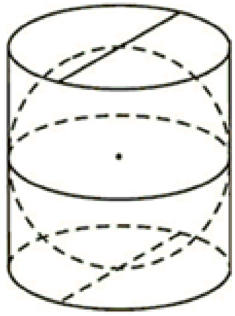


Оскільки при переході через точку x = 1 похідна змінює знак з плюса на мінус, то при $x=1$ функція досягає максимуму. А тому висота конуса SH =3+1=4 см. А тоді радіус основи $AH=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ та об'єм: $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 8\cdot 4=\frac{32}{3}\pi$ см^3.

Відповідь: висота дорівнює 4 см, а об'єм конуса $\frac{32}{3}\pi$ см^3.

Наступна задача є задачею відкритої частини ЗНО, 2008 р.

Задача 4. У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок. Визначте відношення об’єму води, яка залишилась у склянці, до об’єму води, яка вилилась зі склянки.



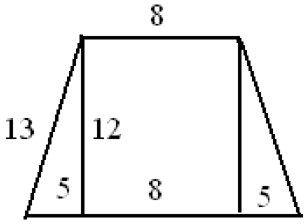
Розв’язання. У циліндра, очевидно, висота дорівнює діаметру основи, а тому $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$. Об’єм води, яка вилилася, дорівнює об’єму кулі: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Тоді об’єм води, яка лишилася, є різницею цих об’ємів: $V_3 = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$. А тоді відношення $V_2 : V_3 = 2:1$.

Відповідь: 2:1.

Серед завдань закритої частини зовнішнього незалежного оцінювання з математики на комбінацію тіл зустрічаємо наступні задачі:

Задача 5. (ЗНО, 2011 р.). У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основою 18 см, вписано конус. Знайдіть площу S бічної поверхні конуса (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 60°. У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

Розв’язання. Зауважимо, що конус вписано у піраміду, тобто основа конуса (круг) вписана в основу піраміди – рівнобічну трапецію. Необхідною і достатньою умовою того, що коло можна вписати у чотирикутник, є рівність сум протилежних сторін чотирикутника, звідки отримуємо, що сума основ трапеції дорівнює сумі її бічних сторін. А тоді невідома основа: $a + 18 = 13 + 13 \Rightarrow a = 8$.

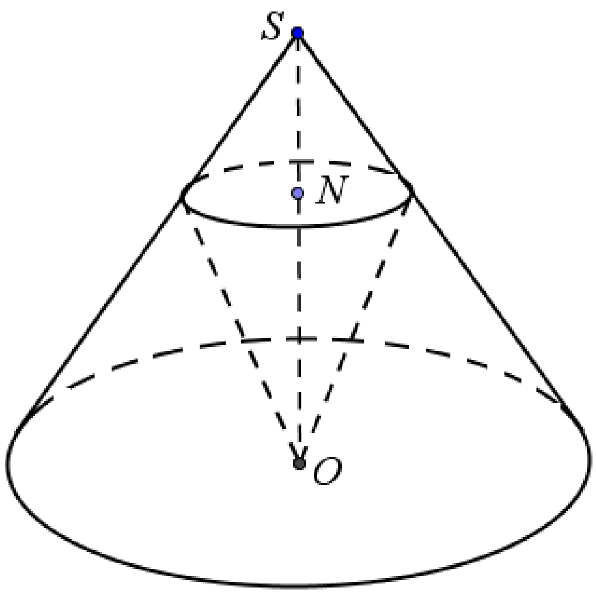


Подальше розв’язання випливає із рисунка: обчислюємо висоту рівнобічної трапеції за стандартним алгоритмом: 18–8=10; 10:2=5; $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тоді радіус вписаного у трапецію кола дорівнює половині висоти $r = 6$. Площа основи $S_{oc} = \pi r^2 = 36\pi$. А тоді площа бічної поверхні $S_{bi} = \frac{S_{oc}}{\cos\varphi} = \frac{36\pi}{\cos 60^o} = 72\pi$. Звідки відповідь до задачі – вираз $\frac{S}{\pi} = 72$.

Відповідь: 72.

Задача 6. (ЗНО, 2015 р., тест Б). Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи – 50. Визначте об’єм цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

Відповідь: 8.



Задача 7. На висоті *SO* конуса відмітили точку *N* так, що *SN*:*NO*=2:3, і провели через неї площину, паралельну до основи, яка перетнула бічну поверхню по колу. Обчисліть об’єм конуса (у см^3) з основою, що проходить через точку *N*, і вершиною у точці *O*, якщо сума об’ємів цього і даного конусів дорівнює 274 см^3.

Вказівка: виконавши указані побудови, визначте подібні трикутники, *SN*:*SO*=2:5, *k*=2:5, площа основи нового конуса відноситься до площі даного конуса як k^2, а висота нового конуса дорівнює 3:5 від висоти даного конуса; запишіть об’єми конусів та отримайте , що об’єм даного конуса 250 см^3, а шуканого – 24 см^3.

Відповідь: 24 см^3.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Справжнє засвоєння математики, а отже, і стереометрії, починається тільки із розв’язування задач. Велике значення має систематичне розв’язування задач, бо найбільші труднощі, які виникають при розв’язуванні задач зі стереометрії – це, крім знань з планіметрії і стереометрії, вміння застосовувати різноманітні прийоми пошуку рішення та поєднувати в процесі розв’язування однієї задачі різні математичні методи.

Наведені приклади – це частина задач з шкільного курсу стереометрії і вчитель зможе внести корективи у викладений матеріал в залежності від підготовки учнів, їх здібностей і інтересів. Розглянутий матеріал корисно використати для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Список літератури

1. Ізюмченко Л.В., Ботузова Ю.В., Ткаченко Л.А. Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (стереометрія): [навч. посібник]. – Кропивницький: КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», 2018. – 121 с.
2. Стереометрія у старшій школі: посіб. для вчителя / Я.С. Бродський, В.Ю. Грек, О.Л. Павлов [та ін.]. – Т.: Богдан, 2005. – 404 с.