УДК 373.5.016:51

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

Михайловська Марія

Науковий керівник: канд. педагогічних наук, доцент Крамаренко Т.Г.

Криворізька гімназія № 91, м. Кривий Ріг, Україна

В статті акцентується увага на необхідності навчання розв’язуванню прикладних задач у навчанні математики у профільній школі. Наведені приклади розв’язування задач економічного, медичного, хіміко-біологічного та фізико-математичного профілів навчання з тем «Похідна та її застосування» та «Інтеграл та його застосування». Процес розв’язування прикладних задач проведено трьома етапами, а саме: побудова математичної моделі, дослідження моделі та інтерпретація отриманих результатів.

Ключові слова: методика навчання математики, прикладна задача, похідна, інтеграл.

The solving of the applied tasks in the course of mathematics of the profile school

M. Mykhailovska

Scientific supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate professor Kramarenko T.G.

Kryvy Rih gymnasium № 91, Kryvy Rih, Ukraine

The solving of the applied tasks in the course of mathematics of the profile school are illustrated in the article. The solving of the task of economic, medical, chemical and biological, physical and mathematical profiles are provided for topics: "Derivative and application of the derivative", "Integral and application of the integral". The process of solving mathematics applied tasks is shown by three stages construction of mathematical model; analysis it and interpretation of the results obtained.

Keywords: methodology for teaching mathematics, applied task, derivative, integral.

Постановка проблеми. Для сучасної людини важливо бути всебічно розвиненою, активною, мобільною, вміти бачити проблему, чітко формулювати та всебічно підходити до її розв’язування. Володіння навичками математичної діяльності та вміннями їх застосовувати до розв’язування різноманітних життєвих ситуації є запорукою успішної участі особистості у сучасному суспільному житті.

Метою та завданням освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі навчання; розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності. Реалізувати поставлені мету та завдання можна за умови посилення практичної та прикладної спрямованості шкільного курсу математики. На нашу думку, головним засобом реалізації прикладної спрямованості курсу математики є використання прикладних задач, а формування вміння розв'язувати прикладні задачі є складовою частиною процесу навчання математики.

Аналіз досліджень і публікацій. Питання прикладної спрямованості шкільного курсу математики висвітлювали Г.П. Бевз, А.В. Прус. Питаннями принципів добору системи прикладних задач, вимог до їх розв'язування займалися дослідники Г.Я. Дутка, Л.О. Соколенко та ін. Проблеми застосування прикладних задач у процесі навчання похідних та інтегралів у курсі алгебри та початків аналізу досліджували В.В. Ачкан, В.О. Швець. Сутність практичної спрямованості навчання математики дослідники вбачають в спрямованості цілей, змісту, засобів, методів і організаційних форм навчання на формування в учнів вмінь і навичок розв'язування математичних задач [7].

Мета роботи полягає в дослідженні методичних особливостей навчання розв'язуванню прикладних задач в курсі математики профільної школи, зокрема при вивченні похідної та інтеграла у курсі алгебри та початків аналізу профільного рівня. Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри і початків аналізу в профільній школі, а предметом дослідження є методика навчання розв'язуванню прикладних задач під час вивчення тем «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування» в курсі алгебри та початків аналізу профільної школи.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Під прикладною задачею в школі здебільшого розуміють задачу, яка виникла поза курсом математики і розв'язується математичними методами і способами, які вивчаються в шкільному курсі [66, 24].

При розв'язуванні прикладних задач, доречно виділити дві основні групи задач: задачі, які не потребують побудови математичної моделі; задачі, розв'язування яких потребує побудову математичної моделі. Найчастіше, в учнів виникають проблеми саме при розв'язуванні задач, в умові яких немає математичної моделі, тобто в яких потрібно самостійно скласти математичну модель. Процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання. На першому етапі відбувається побудова математичної моделі, цей етап потребує ґрунтовних знань учнів суміжних дисциплін або дисциплін у мові яких виникає прикладна задача. На другому етапі відбувається дослідження математичної моделі, тобто розв'язування отриманої математичної задачі, цей етап дає змогу передбачити розвиток процесу, розрахувати його характеристики. На третьому етапі відбувається інтерпретація одержаних на другому етапі результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла.

Розглянемо прикладну задачу та її розв'язання для економічного профілю природничо-математичного спрямування.

Задача [1]. Капітал у 1 мільярд грошових одиниць можна покласти в банк під 50% річних або інвестувати у підприємство, при цьому ефективність вкладу очікується у розмірі 100%, а витрати задані квадратичною залежністю. На прибуток накладається податок в p%. При яких значеннях p вклад в підприємство є більш ефективним, ніж розміщення капіталу в банку?

1. Побудова математичної моделі

Нехай x (млрд. грош. одиниць) інвестується в підприємство, а $(1 - x)$ розміщується під відсотки. Розміщений капітал через рік визначається за формулою складних відсотків $1 - x \quad 1 + \frac{50}{100} \quad = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$, а капітал вкладений в підприємство, визначається за формулою $x \quad 1 + \frac{100}{100} \quad = 2x$. Оскільки за умовою задачі витрати задаються квадратичною залежністю, то вони будуть складати

ax^2, тобто прибуток від вкладу в підприємство $C = 2x - ax^2$. Податки становлять $(2x - ax^2)\frac{p}{100}$, тобто чистий прибуток буде дорівнювати $\left(1 - \frac{p}{100}\right)(2x - ax^2)$. Загальна сума через рік складатиме

$$A(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + \left(1 - \frac{p}{100}\right)(2x - ax^2) = \frac{3}{2} + \left(2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right)x - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x^2.$$

Отже, економічна задача зводиться до математичної задачі знаходження максимального значення функції на проміжку [0,1].

2. Дослідження математичної моделі

Знайдемо максимуму функції $A(x)$ на проміжку [0,1].

1) Знаходимо похідну $A'(x)$: $A'(x) = 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} - 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x$.

2) Знаходимо критичні точки: $A'(x) = 0$; $2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} - 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x = 0$; $x = \frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)}$.

3) Знаходимо другу похідну $A''(x) = -2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

4) $A''\left(\frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)}\right) = -2a\left(1 - \frac{p}{100}\right) < 0$, отже $x -$ точка максимуму.

Щоб $x_0 \in [0,1]$, необхідно аби виконувалась умова:

$0 < 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} < 1$ розв'язавши нерівність, маємо $p < 25$.

Таким чином, якщо $p > 25$, то вигідніше нічого не вкладати у підприємство та розмістити весь капітал у банку. Якщо $p < 25$, то можна показати, що при

$$x = \frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$$

$$A\left(\frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\left(2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right)^2}{4a\left(1 - \frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$

тобто вклад в підприємство є вигіднішим ніж чисте розміщення під відсотки.

3. Інтерпретація. Переведемо результат з математичної мови на мову вихідної задачі. На прибуток накладається податок в p%. При $p < 25\%$ вклад в підприємство є більш ефективним, ніж розміщення капіталу в банку. При значеннях $p > 25\%$ вигідніше нічого не вкладати у підприємство та розмістити весь капітал у банку.

При розв’язуванні цієї задачі в учнів можуть виникнути проблеми на етапі побудови математичної моделі, оскільки потрібно володіти економічнимим апаратом, пам’ятати формулу складних відсотків.

Пропонуємо задачу для учнів фізико-математичного профілю на застосування інтеграла.

Задача [4, с. 86]. Обчислити роботу з викачування рідини, питома вага якої γ, з конічного резервуара розмірами R і H.

1. Побудова математичної моделі. Вводимо систему координат (Рис. 1). Позначимо через $S(x)$ − площу перерізу конуса на відстані x від початку координат. Знайдемо радіус перерізу$r(x)$.

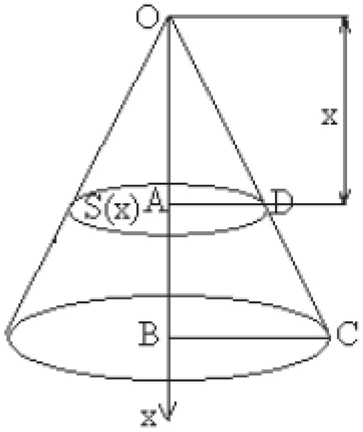

Рис. 1. Конічний резервуар розмірамиRі H

Розглянемо трикутники BOCі AOD. Із подібності $\frac{AD}{BC}=\frac{OA}{OB}$. Так як $AD=r(x)$, $BC=R, OA=x, OB=H$, отримаємо $\frac{r(x)}{R}=\frac{x}{H}$, $r(x)=\frac{xR}{H}$. Тоді площа перерізу

$S(x)=\pi r^2(x)=\pi\frac{x^2R^2}{H^2}$.

2. Дослідження математичної моделі. Обчислимо роботу, яку потрібно виконати для викачування рідини з питомою вагою γ, за формулою

$$A=\gamma\int_{x_1}^{x_2}(x+h)\,S(x)dx,$$

де $x+h$ - висота на яку потрібно підняти рідину.

$$A=\gamma\int_0^H(x+0)\,\pi\frac{x^2R^2}{H^2}dx=\frac{\gamma\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^3dx=\frac{\gamma\pi R^2}{H^2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^H=\frac{\gamma\pi R^2H^2}{4}\text{ Дж.}$$

3. Інтерпретація. Для того щоб викачати рідину, питома вага якої γ, з конічного резервуару розмірами R і H, потрібно виконати роботу $\frac{\gamma\pi R^2 H^2}{4}$ Дж.

Розглянемо задачу хіміко-біологічного профілю навчання на застосування похідної.

Задача [3, с. 80]. Газова суміш складається з окису азоту NO та кисню O_2. При якій концентрації кисню реакція окиснення відбувається з найбільшою швидкістю?

1. Побудова математичної моделі.

Побудуємо модель хімічної реакції окиснення: $2NO + O_2 = 2NO_2$. Швидкість реакції визначається за формулою: $v = kx(100 - x)^2$, де $x -$ концентрація кисню у довільний момент часу в об'ємних процентах; $100 - x$ – концентрація окису азоту; $k -$ константа швидкості реакції.

2. Дослідження математичної моделі.

Потрібно знайти максимум функції швидкості реакції, для цього знайдемо похідну: $v' = k\ \ 100 - x\ ^2 - 2kx\ \ 100 - x\ \ = k\ \ 100 - x\ \ \ 100 - x - 2x\ \ = k\ \ 100 - x\ \ \ 100 - 3x\ $.
Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо критичні точки:

$$k\ \ 100 - x\ \ \ 100 - 3x\ \ = 0; x_1 = 33{,}3\%\ ;\ x_2 = 100\%.$$

Дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = 33{,}3\%\ ;\ x_2 = 100\%$:

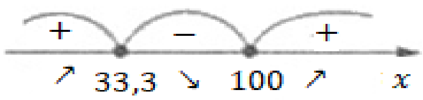

Рис. 2. Інтервал

Отже,$x_{max} = 33{,}3\%$.

3. Інтерпретація. При концентрації кисню, яка складає 33,3%, реакція окиснення відбувається з найбільшою швидкістю.

Нами запропоновано навчальний проект при вивченні теми «Похідна та її застосування», який демонструє необхідність математичних знань при вивчені інших, суспільно значущих, навчальних дисциплін, на тему «Магія похідних». В ході реалізації проекту старшокласники мають відповісти на ключове питання: Чому так стрімко змінюється світ? В подальшому досліджуватимемо розв'язування прикладних задач в інших темах шкільного курсу математики.

Ми розробили електронний навчальний курс «Прикладні задачі» у системі управління навчальним процесом MoodleCloud який складається з двох розділів «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування». Кожний розділ включає в себе навчальні матеріали у вигляді лекцій, посилання на файли з теоретичними відомостями, відеоконференцій, завдань. Також курс містить елементи типу форум, час, глосарій (словник понять).

У першому розділі головної сторінки курсу представлена загальна характеристика курсу: новини, мета і завдання, анкета учасників, голосарій курсу, підручники. Загальні відомості курсу включають: «Новину курсу» реалізовані у вигляді форуму; «Важлива думка кожного» створено за допомогою ресурсу анкета, що дозволяє вчителю збирати дані,які допоможуть йому краще дізнатись своїх учнів та планувати подальшу роботу; «Основні поняття теми» - це голосарій курсу, цей ресурс містить основні терміни і визначення, що використовуються у курсі.

Розглянемо детально структури кожного з модулів (розділів).

Розділ «Похідна та її застосування» містить такі ресурси: гіперпосилання на таблицю «Дослідження функції за допомогою похідної»; даний розділ містить три підрозділи «Задачі економічного профілю», «Задачі медичного та біологічного профілів» та «Задачі фізико-математичного профілю», кожний підрозділ включає в себе лекції за вказаними темами, приклади розв'язаних задач, відео конференції з розв'язування задач, загалом, тих задач, які потребують побудову математичної моделі та завдання. Розділ «Інтеграл та його застосування» містить підрозділи «Задачі економічного профілю» та «Задачі фізико-математичного профілю», які містять аналогічні ресурси курсу.

Тестування учнів з навчальних теми відбувається за допомогою ресурсу Тест, який містить питання типу: «Множинний вибір» (рис. 3), «Коротка відповідь» (рис. 4), «Так/Ні», «Числовий», «Вибір пропущених слів» (рис. 5), «Есе», на відповідність.

При русі тіла по прямій відстань *s* (у метрах) змінюється за законом $s(t)=2t^2-3t+1$ (*t* – час руху в секундах). Знайдіть швидкість тіла через 3 с після початку руху.

Выберите один ответ:

- a. 10 м/с
- b. 9 м/с
- c. 4 м/с
- d. 15 м/с

Рис. 3. Тестове завдання з теми «Похідна та її застосування» типу «Множинний вибір»

Чи вірно побудовано математичну модель до задачі? Якщо ні, то вкажіть помилку

Драбина завдовжки 5 м приставлена до стіни таким чином, що верхній її кінець знаходиться на висоті 4 м. У деякий момент часу драбина починає падати, при цьому верхній кінець наближається до поверхні землі з постійним прискоренням 2 м/с. З якою швидкістю віддаляється від стіни нижній кінець драбини в той момент, коли верхній кінець знаходиться на висоті 2 м?

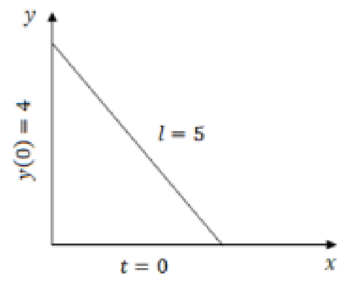

Рис. 6. Графік функції у момент часу $t=0$

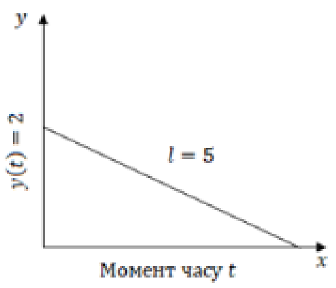

Рис. 7. Графік функції у момент часу t

Якщо верхній кінець сходів у момент часу t знаходиться на висоті $y(0)=4$ (м), а нижній на відстані $x(t)$ від стінки, то висота $y(t)$ описується формулою: $y(t)=4-\frac{at^2}{2}$ оскільки постійне прискорення $a=2$ м/с, рух рівноприскорений, висота $y(t)=4-t^2$.

Розглянемо поведінку тіла у момент часу t: $y(t)=2$, тобто $2=4-t^2$. Звідси $t=\sqrt{2}$. За теоремою Піфагора $x(t)=\sqrt{l^2-y(t)^2}$, тобто $x(t)=\sqrt{25-(4-t^2)^2}=\sqrt{9+8t^2-t^4}$. $x(t)$ – функція, що описує віддалення від стіни нижнього кінця драбини.

Відповідь:

Рис. 4. Завдання з теми «Похідна та її застосування» типу «Коротка відповідь»

Прикладні задачі розвязуються за такою схемою: 1. Вибрати... , 2. Вибрати... та

Вибрати...

- Вибрати...
- Інтерпретація
- Дослідження математичної моделі
- Переклад задачі

Рис. 5. Тестове завдання типу «Визначення пропущених слів»

При використанні електронного курсу в навчанні учнів, можна відмітити такі позитивні моменти: надання через мережу освітніх матеріалів всім бажаючим учням; забезпечення і підтримка можливості взаємного спілкування як між учнями, які беруть участь у курсі, так і між учнями і вчителем, у синхронному режимі, письмове спілкування в реальному часі за допомогою чату, наприклад щотижневі консультації, або в асинхронному режимі за допомогою форуму; надання інструментів, які забезпечують можливість здійснення поточного контролю і оцінки досягнень окремих учнів.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Одним з ефективних шляхів формування системи математичних компетентностей учнів є навчання розв'язуванню прикладних задач. Розв'язування прикладних задач сприяє набуттю складових математичної компетентності. Прикладні задачі досить вдало доповнюють систему задач шкільного курсу математики і можуть використовуватися на різних етапах та реалізовувати різні навчальні цілі: готувати до вивчення або розпочинати вивчення нової теми, сприяти поглибленню знань у процесі вивчення теми.

Список літератури:

1. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів / В. В. Ачкан // Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Сер.: Педагогічні науки. – 2014. – № 1. – С. 12 – 23.

2. Головань М. С. Інформатична компетентність: сутність, структура та становлення / М. С. Головань // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2007. – № 4. – С. 62 – 69.

3. Личковский Е. І. Вища математика : підручник / Е. І. Личковский, П. Л. Свердан, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий. – Вінниця: Нова книга, 2014. – 632 с.

4. Прикладные задачи математического анализа : методические указания к самостоятельной работе для студентов / сост. : О. Г Ровенская, Н. В. Белых. – Краматорск : ДГМА, 2011. – 152 с.

5. Прус А.В. Загальні питання прикладної спрямованості шкільного курсу математики / А.В. Прус // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2007. – Вип. 34. – С. 67 – 71.

6. Соколенко Л. О. Система прикладних задач природничого характеру як засіб формування евристичної діяльності учнів / Л. О. Соколенко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 24 – 28.

7. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В. О. Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: ДонНУ, 2009. –№ 32. – С. 16 – 23.