УДК 514.13

СЕРЕДНІ ТА ЇХ ГЕОМЕТРИЧНІ ТЛУМАЧЕННЯ

Микуленко Наталія Миколаївна

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Волков Ю. І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. *У статті розглянуті основні види середніх величин, які застосовуються у курсі викладання математики в середній школі. Основна увага приділена тлумаченню на прикладах сутності середніх та геометричній інтерпретацій формул середніх величин на геометричній фігурі - трапеції. Стаття ілюстрована графічними та геометричними інтерпретаціями геометричних середніх для кращого сприйняття інформації. Стаття буде корисна викладачам та студентам, які цікавляться наближеними обчисленнями, прикладною математикою, та вчителям, які ведуть гуртки з математики та інформатики.*

Ключові слова: *середні величини, середня арифметична, середня геометрична, середня гармонійна, геометричне тлумачення, трапеція.*

Means and their geometric interventions

N. Mikulenko

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematics Volkov Y. I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

Abstract. *The article deals with the main types of averages used in the course of teaching mathematics in high school. The main attention is paid to the interpretation of the meanings of the meanings and geometric interpretations of the formulas of the mean values on the geometric figure - trapezium. The article is illustrated by graphic and geometric interpretations of geometric mean for better perception of information. The article will be useful for teachers and students interested in approximate calculations, applied mathematics, and teachers leading maths and computer science groups.*

Keywords: *mean, arithmetic mean, mean geometric, mean harmonic, geometric interpretation, trapezium.*

Постановка проблеми. Важливими об'єктами математичного аналізу та теорії ймовірності є середні та різноманітні співвідношення між ними, зокрема, нерівності між різними типами середніми. Тому вивчення таких питань в шкільному курсі математики, курсах математичного аналізу та теорії ймовірностей у вищих навчальних закладах, завжди було і є актуальним.

Аналіз досліджень і публікацій. Теоретичні та методологічні питання статистичних угруповань та їх середніх знайшли відображення в роботах Айвазяна С.А., Боярського А.Я., Єлісєєвої І.І., Ізюмченко Л.В. [1], Маслової Н.П., Немчинова В.С., Пасхавера І.С., Рабиновича П.М., Юзбашева М.І., Ястремського Б.С. та ін.

Метою роботи є геометричне тлумачення середніх величин, які застосовуються в курсі математики середньої школи .

Виклад основного матеріалу. Середнє значення здається дуже простим терміном. Саме простота робить його таким лукавим. Слід визначити, які середні значення бувають, і як їх використовувати правильно.

Середні величини були відомі ще у стародавні часи. У піфагорейській школі ми знаходимо вчення про середні величини. Точніше про пропорції і відносинах величин. Це одне з ключових понять піфагорейської систематики, яке виникає в математичних науках: арифметики, геометрії, музики.

Середніми величинами в давнину називалися групи трьох величин, середня з яких є функція двох крайніх.

Древні греки налічували десять видів "середніх величин". З них три, найбільш поширені (арифметичне, геометричне і гармонійне середнє, як пропорція), визначив, найімовірніше, один із сучасників Платона - піфагорієць Архіт Тарентський (початок IV ст. До РХ) в своєму трактаті "Про музику". Він же - фактично перший винахідник (дитяча брязкальце, гвинтова різьба, літаючий дерев'яний голуб) і перший, хто прив'язав рух механізмів до геометричному кресленням, поклавши початок теоретичної механіки.

Никомах Герасскій у "Запровадження в арифметику" повідомляє, що до трьох середнім, про яких вчили "древні", послідовники Аристотеля і Платона пізніше додали ещѐ три, а "Нові автори" - ещѐ чотири [2]. Всього стало 10.

Про чотирьох "нових" середніх пише також Папп Олександрійський в "Математичному зборах ". Хоча списки" нових "середніх у них трохи не збігаються. - У кожного з них є одне таке середнє, якого немає в іншого. Причина криється в логіці побудов: "Нових" середніх повинно бути не чотири, а п'ять [3].

Отже, які ці найбільш поширені середні (табл. 1).

Назва	Формула	Формула для двох чисел	Де використовується
Середня арифметична	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$m = \frac{a+b}{2}$	В більшості випадків
Середня геометрична	$m_c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$	$g = \sqrt{ab}$	Інвестиції, зріст, обсяг
Середня гармонійна	$\Gamma_c = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots\ldots \frac{1}{x_i}}$	$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$	Розрахунок швидкості, обсягів виробництва, вартості

Таблиця 1. Формула та використання найбільш розповсюджених середніх величин

Якщо спробувати визначити значення слова «середнє», то для більшості це «деяке число посередині» або деяке збалансоване за деякими критеріями число.

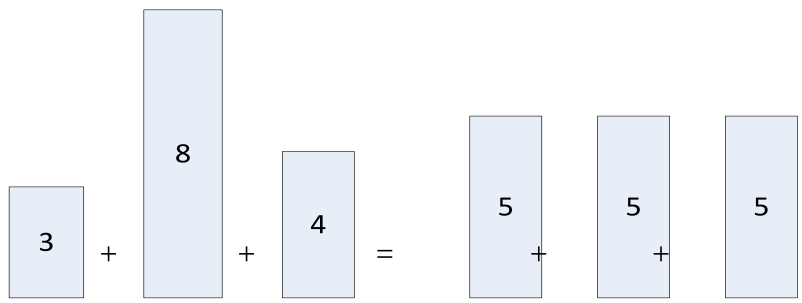
Можна запропонувати більш універсальну інтерпретацію поняття «середнє значення». Середнє значення будь-якого ряду значень - це те, яким можна замінити будь-яку одиницю ряду і отримати той же результат.

Одна з цілей отримання середнього значення - це зрозуміти суть вибірки даних за допомогою репрезентативного зразка. Але сам процес обчислення середнього значення залежить від того, яким чином взаємодіють елементи групи даних. Нами буде досліджуватися види середніх за допомогою геометричного тлумачення на геометричній фігурі. Автори статті «Числові середні і геометрія» зауважують: «Існує фігура, в якій всі числові середні двох чисел a і b можна побачити« живцем» - це трапеція ABCD з основами BC = a і AD = b» [4]. Ми домовимося розглядати трапецію, у якій b> a.

Середнє арифметичне.

Середнє арифметичне знайоме всім зі школи:

середнє арифметичне = сума всіх величин / кількість величин *(1)*



Сума всіх значень Сума середніх значень

Рис. 1. Інтерпретація середнього арифметичного

Задача 1. Ви важите 75 кг і зайшли в ліфт з підлітком вагою 50 кг і товстуном вагою 175 кг. Який середня вага вашої групи?

Насправді питання стоїть так: Якщо замінити компанію трьома клонованими людьми з однаковою вагою, якою вагою повинен володіти кожен такий клон?

В цьому випадку ми можемо замінити три різних людини трьома клонами вагою в 100 кілограм кожен: 75 + 50 + 175) / 3.

Якщо звернутися до геометричної трапеції, то можна відмітити, що найбільш відомий відрізок з тих, довжини яких є середніми величинами в трапеції, - це середня лінія трапеції, тобто відрізок, що з'єднує середини її бічних сторін. У будь-трапеції з основами, довжини яких дорівнюють a і b, довжина середньої лінії дорівнює середньому арифметичному довжин основ.

Наведемо доказ цього факту. У трапеції *ABCD* з основами *AD* і *BC* побудуємо відрізок *MN*, кінці якого є центрами бічних сторін. Через точку N проведемо пряму, паралельну бічній стороні *AB*, і на перетині цієї прямої з прямими, на яких лежать підстави цієї трапеції, поставимо точки K і L. Трикутники *CNK* і *DNL* рівні по стороні і прилеглих до неї кутам. Значить, $CK = LD$. Позначимо довжину відрізка *MN* буквою m. Тоді Обозначим длину отрезка *MN* буквой m. Тоді $CK = m - a$; $LD = b - m$. З рівності відрізків *CK* та *LD* можна вивести $m - a = b - m$; $2m = a + b$; $\boldsymbol{m = \frac{a+b}{2}}$.

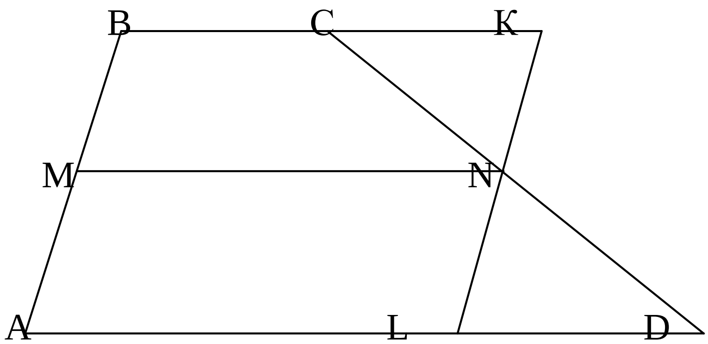


Рис. 2. Середнє арифметичне на трапеції

Середнє геометричне.

Усереднений елемент» залежить від того, що ми робимо з уже існуючими елементами групи даних. Коли ми працюємо з інвестиціями, площею і об'ємом, у таких випадках дані взаємодіють між собою саме шляхом множення (очікувана прибутковість, обсяг або площа фігури обчислюються за допомогою множення), і це змінює наш підхід до виявлення середніх значень.

Задача 2. Який інвестиційний портфель найбільш прибутковий? Іншими словами, який з них принесе більший прибуток протягом типового року?

- Портфель А: + 10%, -10%, + 10%, -10%
- Портфель Б: + 30%, -30%, + 30%, -30%

Виглядають вони схоже. Наша повсякденна логіка, побудована на звичці до середнього арифметичного, говорить нам, що обидва портфеля досить ризиковані, і обидва в середньому приведуть до збитків або нульового прибутку. Тому, напевно, ми виберемо портфель Б, оскільки в успішний рік він принесе більше прибутку.

Але відсотки з інвестицій множаться, а не складаються. Ми не можемо просто взяти і використовувати середнє арифметичне, нам потрібно знайти реальний коефіцієнт окупності. Коефіцієнт окупності знаходиться досить просто: беремо умовні 100% нашого поточного капіталу в якості одиниці. Далі представляємо коливання прибутковості-збитку в цьому описі портфелів, додаючи до нашої одиниці або віднімаючи з неї процентні показники. Потім перемножуємо отримані коливання і отримуємо коефіцієнт. Для розрахунку середньорічного значення коефіцієнта окупності ділимо отриманий коефіцієнт на 4 (оскільки елементів в нашому числовому ряду чотири).

- Портфель А:

Коефіцієнт окупності: *1,1 * 0,9 * 1,1 * 0,9 = 0,98 (2% збитку)*

Середньорічне значення: $\sqrt[4]{0{,}98}$ = *0,5% річного збитку*

- Портфель Б:

Коефіцієнт окупності: *1,3 * 0,7 * 1,3 * 0,7 = 0,83 (17% збитку)*

Середньорічне значення: $\sqrt[4]{0{,}83}$ = *4,6% річного збитку*

Вибір між 2% або 17%, і саме тут середнє арифметичне не працює.

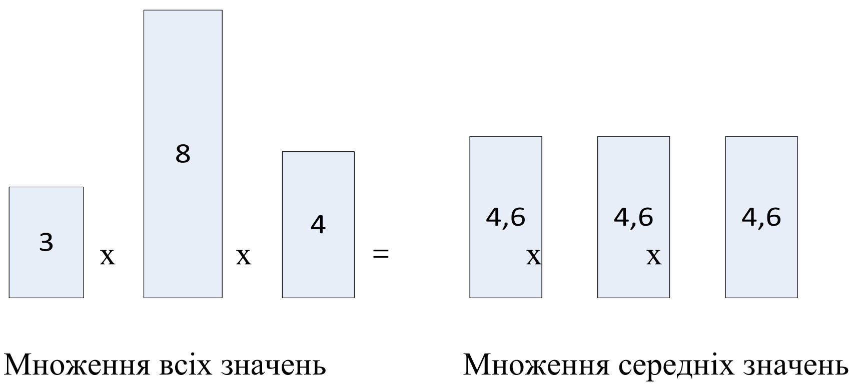


Рис. 3. Інтерпретація середнього геометричного

Наведемо ще декілька прикладів, де працює середнє геометричне:

- Темпи інфляції: Є показники в 1%, 2% і 10%. Який середній показник інфляції за конкретний період часу? $\sqrt[3]{1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}10}$ = *4,3%.*

- Знижки: Є три знижкових купона на 50%, 25% і 35%. Яка середня знижка? $\sqrt[3]{0{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}65}$ *= 37.5%.*

- Площа: Є ділянка землі 40х60 м. Потрібно обчислити «усереднену сторону» - іншими словами, сторону квадрата приблизно тієї ж площі.

$\sqrt[2]{40 \cdot 60}$ *= 49 м.*

- Обсяг: Є коробка 12х24х48 см. Потрібна усереднена сторона, тобто сторона куба приблизно того ж обсягу. $\sqrt[3]{12 \cdot 24 \cdot 48}$ *= 24 см.*

Якщо повернутися до трапеції, то середню геометричну можна знайти наступним чином.

Довжина відрізка, паралельного підстав трапеції, кінці якого лежать на бічних сторонах, дорівнює середньому геометричному чисел a і b, якщо він ділить дану трапецію на дві трапеції, подібні між собою.

Доведемо це. Відрізок *KE* ділить трапецію *ABCD* на дві подібні трапеції *AKED* і *KBCE*. Значить, відносини відповідних сторін в цих трапеції рівні.

$$\frac{KE}{BC} = \frac{AD}{KE}\ ;\ KE^2 = BC \cdot AD;\ KE = \sqrt{BC \cdot AD};$$

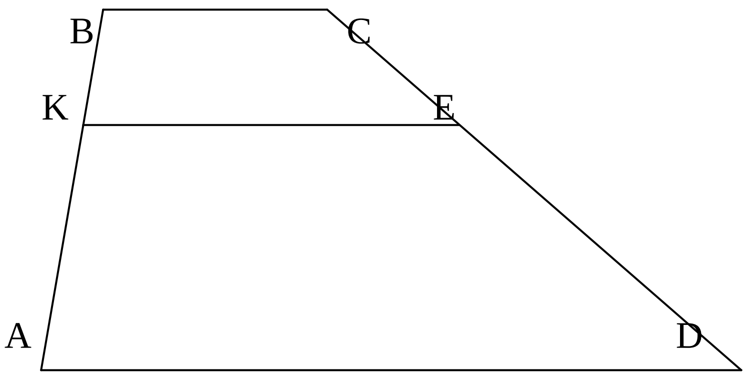


Рис. 4. Середнє геометричне на трапеції

Позначимо довжину відрізка *KE* буквою g.

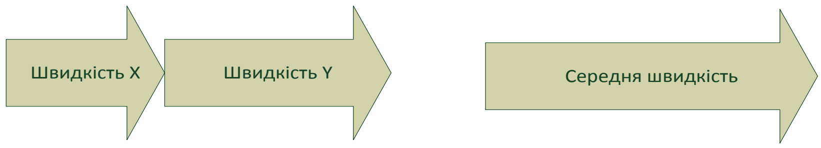
$g = \sqrt{ab}.$

Середня гармонійна.

Середнє гармонійне уявити складніше, ніж попередніх представників «середніх», але воно не менш корисно. Між іншим, саме поняття «гармоніки» в математиці пов'язано зі зворотними числами (1/2, 1/3 і т.д.). Середнє гармонійне допомагає нам обчислити середнє арифметичне в рядах чисел, заданих зворотними значеннями.

Коли ми хочемо дізнатися середнє значення для декількох швидкостей (X і Y), потрібно думати про результат і одиницях виміру, а не про вихідні цифрах.

середня швидкість = загальний результат / загальна одиниця виміру



1 одиниця + 1 одиниця 2 одиниці
Час 1/X Час 1/Y Час 1/X + 1/Y

Рис. 5. Інтерпретація середнього гармонійного

Задача 3. Візьмемо двох працівників: X і Y. Обидва працюють в одному проекті і виконують однакову кількість роботи, але швидкість їх роботи різна. Яка середня швидкість їх роботи?

Скажімо, працівник X кладе 30 цегли в годину, а працівник Y - 60 цеглин на годину. Значить, на одну цеглину у кожного працівника йде:

- У працівника X укладання одного цегли займе 1 / X часу (1/30);

- У працівника Y укладання одного цегли займе 1 / Y часу (1/60)

Складаємо результати і одиниці виміру:

Загальний результат: 2 цегли (X і Y поклали по одному) Загальна одиниця часу: 1 / X + 1 / Y (у кожного йде різна кількість часу)

Середньою швидкістю обох працівників буде:

$$\frac{2}{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}}$$

Задача 4. Вранці ви ведете машину до роботи зі швидкістю 30 км / год, тому що ви не хочете на роботу, а назад їдете вже зі швидкістю 60 км / год, тому що поспішайте потрапити додому. Яка середня швидкість вашого пересування в цей день?

Припустимо, деяка кількість кілометрів R ми проходимо на швидкості X, а інша кількість кілометрів R - на швидкості Y. Середня швидкість при цьому буде обчислюватися так само, як обчислюється середня швидкість проходження 1 км на швидкості X і одного кілометра на швидкості Y:

$$\frac{2R}{\frac{R}{30}+\frac{R}{60}}=\frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{60}}=40$$

Середнє гармонійне використовується тоді, коли один і той же обсяг роботи виконується на різних швидкостях.

Середнє значення - це один елемент, здатний передати суть цілої групи елементів. У нашому прикладі з роботою і офісів в середньому туди-назад ми їдемо на швидкості 40 км/год (замість 30 км/год туди і 60 км/год назад). Важливо пам'ятати, що середньою швидкістю ми замінюємо кожну «стадію».

Повернемося до трапеції. Напевно, найкрасивішим з властивостей відрізків, паралельних основам трапеції, є властивість відрізка, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції. Довжина такого відрізка дорівнює середньому гармонійному довжин основ трапеції.

На малюнку *O* - точка перетину діагоналей, *TL* - відрізок, паралельний основам трапеції, проходить через точку O, кінці якого лежать на бічних сторонах.

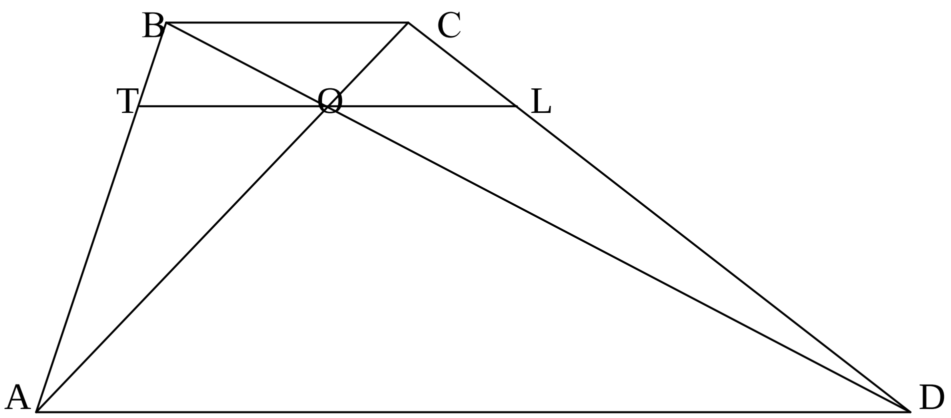


Рис. 6. Середнє гармонійне на трапеції

Для доказу розглянемо чотири пари подібних трикутників. Трикутники *TBO* і *ABD* подібні, значить, $\frac{TO}{b} = \frac{BO}{BD}$; трикутники *OCL* і *ACD* подібні, значить, $\frac{OL}{b} = \frac{OC}{AC}$; трикутники *ODC* і *BDC* подібні, значить, $\frac{OL}{a} = \frac{OD}{BD}$; трикутники *TAO* і *BOC* подібні, значить, $\frac{TO}{a} = \frac{AO}{AC}$. Складемо всі чотири рівності:

$$\frac{TO}{b} + \frac{OL}{b} + \frac{TO}{a} + \frac{OL}{a} = \frac{BO}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC} + \frac{OD}{BD}$$

спростимо:

$$\frac{TL}{b} + \frac{TL}{a} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC};\ TL\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 2; TL = \frac{2ab}{a+b}.$$

Позначимо довжину відрізка *TL* буквою *h*.

$$\boldsymbol{h = \frac{2ab}{a+b}}$$

Висновки. Навіть така проста на перший погляд ідея, як «середнє значення», має безліч застосувань. Ми розглянули лише самі основні і не торкнулися середньозваженого, середньоквадратичного, центру ваги, математичне очікування і багато іншого. Але слід виділити головні принципи:

- Середнє значення покликане відобразити основну суть всіх елементів в групі [5]/

- Тип середнього значення залежить від того, як взаємодіють елементи в групі (складаються? Множаться? Стають зворотними величинами? Просто вибираються?).

Переваги середнього арифметичного: відмінно працює для сукупностей, значення яких легко складаються; просто обчислюються; інтуїтивно зрозумілі.

Недоліки середнього арифметичного: середнє арифметичне не працює для числових рядів з великим розкидом в значеннях. Ну, скажімо, середнє арифметичне чисел 100, 200 і -300 - це 0; середнє арифметичне спрацьовує в 80% випадків, на жаль, 20% залишилися випадків і змушують нас шукати альтернативи для підрахунку середнього значення.

Середнє геометричне допомагає знайти «типовий елемент» серед групи елементів, що взаємодіють один з одним шляхом множення.

Середнє гармонійне використовується тоді, коли один і той же обсяг роботи виконується на різних швидкостях.

Робота може бути корисною для студентів фізико-математичних спеціальностей, для викладачів математичних гуртків загальноосвітніх навчальних закладів, та для тих, хто цікавиться середніми величинами.

Список літератури

1. Ізюмченко Л. В., Гаєвський М. В. Методи обчислень. Частина І. Чисельні методи алгебри: Навчальний посібник. – Кіровоград: КДПУ імені В. Винниченка, 2008. – 84 с.
2. Щетников А.И. Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона // ΣΧΟΛΗ. Философское антиковедение и классическая традиция. – 2008. – Т. 2, вып. 1. – С. 55-74.
3. Heath T.L. (1921) A History of Greek Mathematics. 2 vols. – Oxford; repr. New York, 1981.
4. Гольдман А., Звавич Л., Числовые средние и геометрия/ Гольдман А., Звавич Л.//Квант. – 1990. - №9. – С. 62 – 64.
5. Пиголкина Т., Средние значения/ Пиголкина Т.//Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика – М.: Аванта+ - 2002. – С. 143 – 145.