УДК 372.851

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА» У СТАРШІЙ ШКОЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТА MAPLE

Медведенко Валерія

Науковий керівник: канд. пед. наук, старший викладач кафедри математики Ботузова Ю.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті піднімається питання впровадження сучасних освітніх технологій в навчальний процес, зокрема на уроках математики. Було проаналізовано питання використання комп'ютерних технологій під час навчання математики. На прикладі розкрито особливості покрокового розв'язання задачі з теми: «Повне дослідження функції та побудова її графіка» у старшій школі з застосуванням математичного пакета Maple. Автор здійснює аналіз отриманих результатів, вказує на помилки, недоліки в роботі даного математичного пакета, також зазначає переваги використання Maple на уроках математики.

Ключові слова: методика навчання математики, математичний пакет Maple, ІКТ в навчанні, дослідження функції.

Methodical features of the studying the topic "A full study of the function and construction of its graphic" in the senior school with the using of mathematical program Maple

Medvedenko Valeriia

Scientific adviser: Cand. Ped Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics Botuzova Y.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The article raises the question of the introduction of modern educational technologies into the educational process especially in mathematics lessons. The question of using computer technologies during mathematics training was analyzed. The example reveals the features of a step-by-step task solution of the studying the topic "A full study of the function and construction of its graphics" in the high school using the mathematical program Maple. The author analyzes the results, points to errors, shortcomings in the work of this mathematical program, and points out the advantages of using Maple on the lessons of mathematics.

Keywords: methods of teaching mathematics, math program Maple, ICT in the teaching, research of function.

Постановка проблеми. Сучасна українська школа постійно зазнає значних змін, гостро постає необхідність її модернізації та розвитку. Процес інформатизації освіти супроводжується суттєвими змінами в педагогічній теорії і практиці навчально-виховного процесу, пов'язаними з внесенням коректив у зміст технологій навчання, тому для ефективного впровадження інформаційних технологій, педагогам необхідно знати цілі та завдання, провідні тенденції, напрямки та шляхи завдяки яким інформаційні технології будуть введенні у навчально-виховний процес старшої школи.

Потребують впровадження новітніх технологій і уроки математики. Підвищити ефективність уроків математики можна за рахунок застосування новітніх інформаційних та педагогічних технологій. Для цього треба глибоко знати основи психолого-педагогічної теорії як підґрунтя розробки комп'ютерних технологій навчання. Необхідно усвідомлювати можливості комп'ютерної техніки та спеціального програмного забезпечення в подані навчального матеріалу та в управлінні пізнавальними діями учнів.

Аналіз досліджень і публікацій. На сьогоднішній день проблеми створення і впровадження комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики в навчальних закладах досліджували Томащук О.П., Триус Ю.В, Шахіна І.Ю., Семенина І.В., Гарасимчук І.Д., Бакланова М.Л., Жалдак М.І та інші. Але розвиток ІКТ в освіті підштовхує все більше науковців, методистів, педагогів досліджувати дану тему.

Мета статті – розкрити методичні особливості використання математичного пакета Maple при вивченні теми «Дослідження функції та побудова її графіка» у старшій школі. Досягнення мети реалізовано через виконання таких завдань: продемонструвати розв'язання завдань на дослідження функції за допомогою математичного пакета Maple; розглянути на прикладі однієї теми з математики старшої школи як можна і потрібно використовувати комп'ютер на уроках математики.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Використовуючи програмне забезпечення для подачі нового матеріалу, можливості вчителя набагато збільшуються. Незважаючи на більш складну та довшу підготовку до занять, з таким способом подачі інформації, вчитель економить час під час заняття. Це дозволяє не лише більш глибоко і змістовно розглянути певну тему, а й дозволяє більше часу приділити розв'язуванню завдань, тобто набути практичних умінь. Для того, щоб зацікавити учнів до вивчення математики, варто, інколи не просто вводити формули і доводити їх, а обчислювати їх в математичних пакетах. Правильно підібране завдання буде не лише цікавим, але й мати дослідницький характер. В математичному аналізі є завдання, розв'язати які жодна з програм не може повністю. Але користувач може, маючи певні математичні знання, скористатися послідовністю необхідних операторів та отримати результат кожного кроку обчислення і, як наслідок, розв'язати завдання повністю. До таких завдань можна віднести і більшість кроків повного дослідження функції. Розглянемо на прикладі, як розв'язати таке завдання в математичному пакеті Maple.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.[3, 269].

Розв'язання.

1. Знаходимо область визначення функції.

Задана функція дробово-раціональна, тому вона не визначена в тих точках, де знаменник дорівнює нулю: $x^2 - 1 = 0$ звідси $\mathrm{x} = \pm 1$. Отже, областю визначення функції є об'єднання множин $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Для перевірки цього факту в математичному пакеті Maple вводимо:

>discont(x^3/(x^2-1), x);

Отримуємо результат {-1, 1} – означає, що ці дві точки не належать області визначення функції (рис.1).

Команда **discont(f,x)** дозволяє знаходити точки розриву функцій першого та другого роду. Синтаксис команди: **f** – функція, що досліджується на неперервність, **x** – аргумент функції.

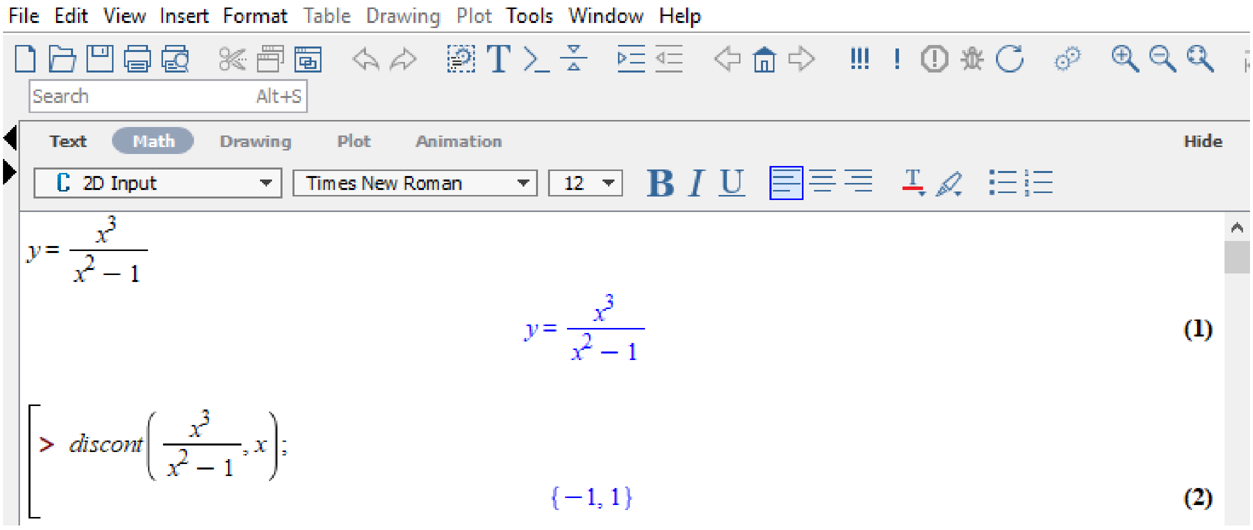

Рис. 1. Знаходження точок розриву для функції в Maple

2. Визначимо точки перетину графіка з осями координат.

Нехай $y = 0$, тоді $x = 0$. Нехай $x = 0$, тоді $y = 0$. Отже, графік перетинає координатні осі в точці O(0;0), тобто графік проходить через початок координат.

Перевіримо це у Maple:

1) $y = 0$ (точки перетину графіка функції з віссю oX):

```
>restart;
>y := x^3/(x^2-1);
>y = 0;
>solve(%,x);
```

2) $x = 0$ (точки перетину графіка з віссю Oy):

```
>restart;
>y := x^3/(x^2-1);
>x := 0;
>y;
```

В обох випадках у відповідях отримуємо 0. Отже, графік перетинає координатні осі в точці O(0;0), тобто графік проходить через початок координат.

3. Дослідимо функцію на парність.

Оскільки, в програмі немає можливості замінити x на –x, то замінимо x на –z, а потім порівняємо отриману функцію з попередньою, враховуючи таку заміну.

Запис у програмі:

>restart;

>y := x^3/(x^2-1);

>x := -z;

>y;

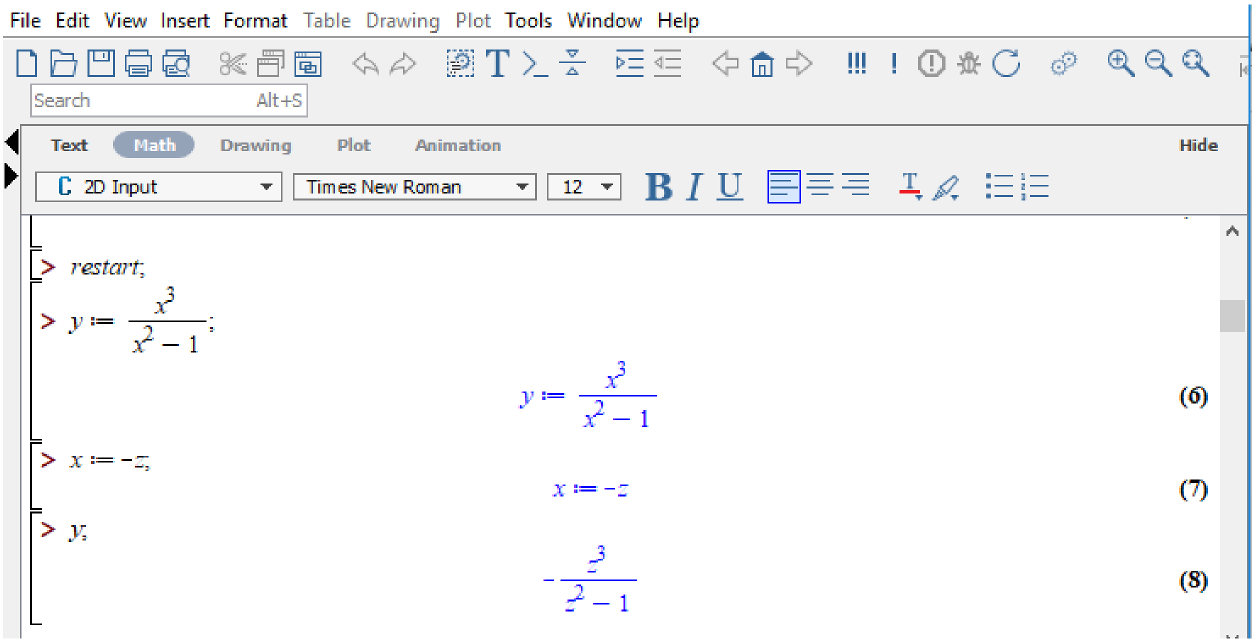

Рис. 2. Дослідження функції на парність в Maple

Отримуємо функцію, яка відрізняється від початкової знаком мінус, тобто вона є непарною, значить її графік має бути симетричним відносно початку координат. В окремих випадках будемо розглядати лише $x \geq 0$.

4. Як з'ясували в першому пункті точками розриву є +1 і -1. Дослідимо їх характер. Для цього знайдемо односторонні границі для x=1, так як функція парна.

Запис у математичному пакеті:

>restart;

>limit(x^3/(x^2-1),x=1,left);

>limit(x^3/(x^2-1),x=1,right);

Відповіді як і при підрахунку «в ручну», так і в програмі, отримаємо однакові: для лівосторонньої границі маємо -∞, для правосторонньої - +∞ (рис.3).

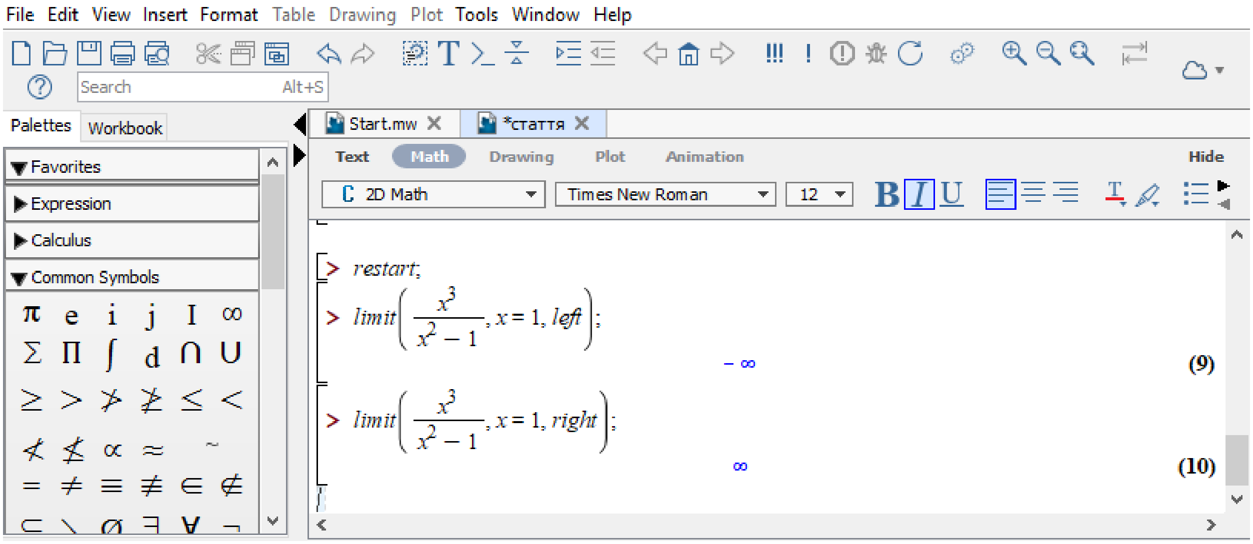

Рис.3. Обчислення односторонніх границь в Maple

Отже, x=1 є точкою розриву другого роду. Пряма x=1 є вертикальною асимптотою.

5. Дослідимо функцію на кінцях проміжків, де вона визначена. Знайдемо

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x} = +\infty.$$

Для перевірки в програмі вводимо:

>limit(x^3/(x^2-1),x=infinity);

Отримаємо відповідь: +∞ (рис. 4).

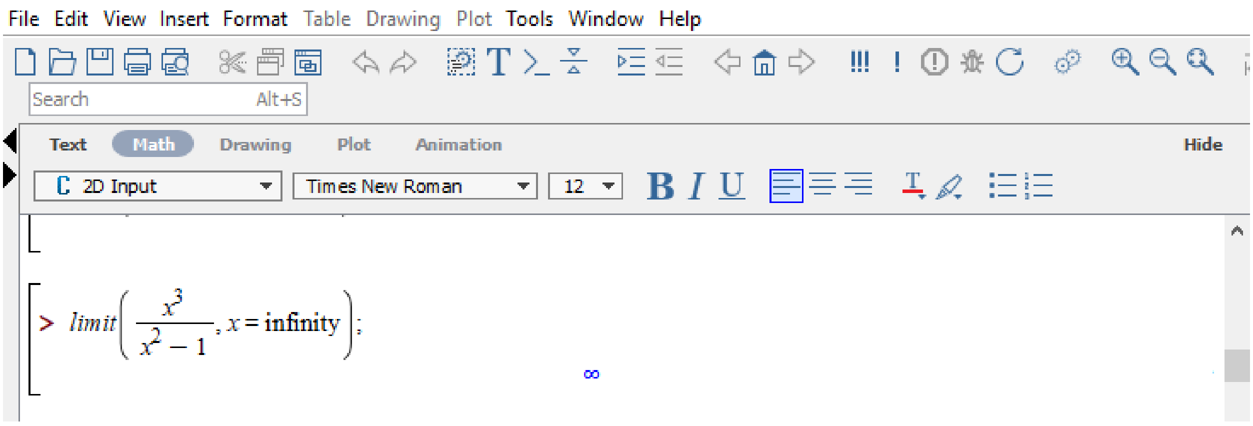

Рис. 4 Обчислення границі функції в Maple

6. Дослідимо функцію на зростання та спадання.

Знайдемо y': $y' = \frac{x^2-1\ \times 3x^2 - x^3 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

Розв’яжемо нерівність $y' > 0$: $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0$.

Знаменник та перший множник чисельника – додатні, тому дістанемо $x^2 - 3 > 0$, звідси $x < -\sqrt{3}$ або $x > \sqrt{3}$.

Запис у математичному пакеті Maple:

```
>restart;
>y1:=diff(x^3/(x^2-1),x);
>solve(y1>0,x);
>solve(y1<0,x);
```

Отже, функція зростає на проміжку $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ і спадає на проміжку $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$ (рис. 5).

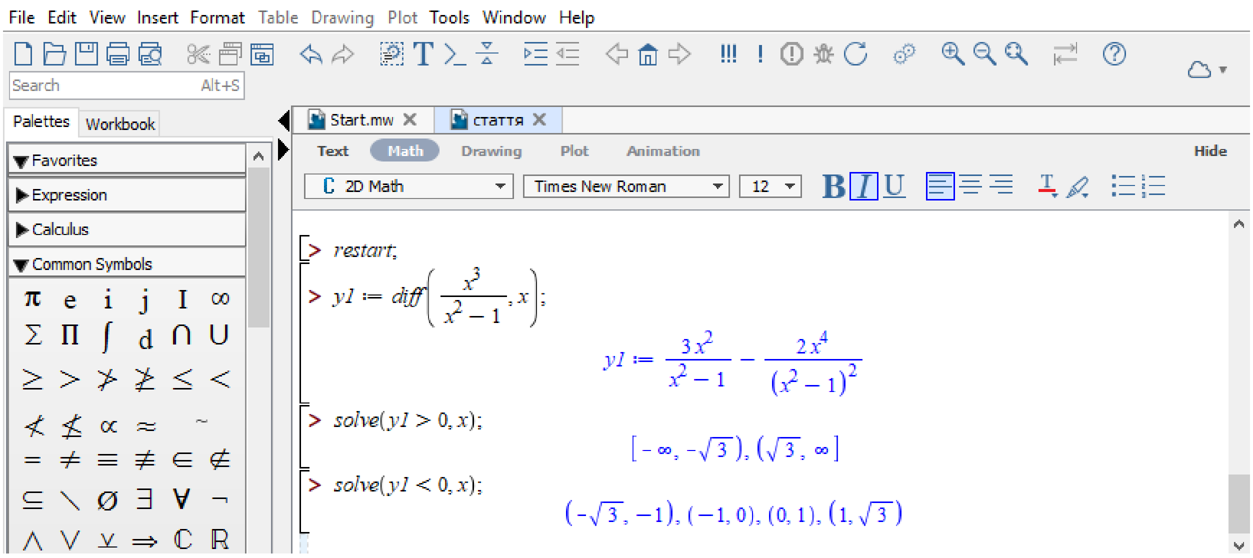

Рис. 5. Встановлення проміжків зростання/спадання функції в Maple

7. Знайдемо екстремальні точки.

Розв’яжемо рівняння $y' = 0$: $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$.

Звідси знайдемо стаціонарні точки: $x_1 = 0,$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$.

При переході x через точку x_1 похідна y' знак не змінює, а при переході x через точку x_3 похідна y' змінює знак «-» на «+». Тому x_1 не є екстремальною точкою, а x_3 є точкою мінімуму: $y_{min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Перевіримо це у Maple:

>restart;

>y1:=diff(x^3/(x^2-1),x);

>solve(y1=0,x);

Отримаємо результат : точки 0,0, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

Оскільки, функція непарна, то розглянемо лише дві точки 0, $\sqrt{3}$, тобто три проміжки (рис. 6):

>x:=-1,5:y1; результат: -1,080000000

>x:=1,5:y1; результат: -1,080000000

>x:=4:y1; результат: 208/225

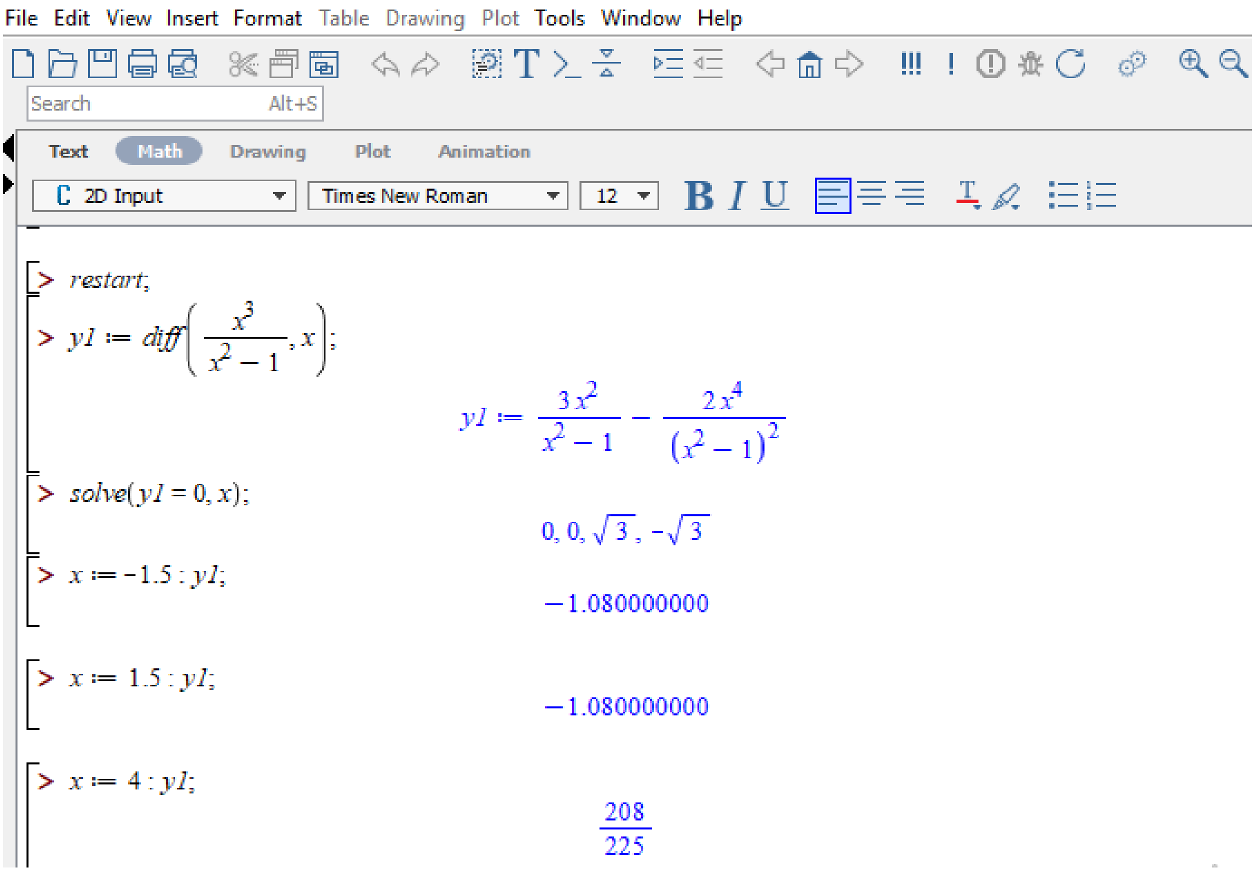

Рис. 6. Обчислення значень похідної в точках на проміжках

Тобто знак змінюється лише при переході через точку $x_3 = \ \overline{3}$ з «-» на «+». Тобто це є точка мінімуму.

>restart;

>y:= x^3/(x^2-1);

>x:=sqrt(3); y;

Отримуємо результат: $\frac{3\ \overline{3}}{2}$ – мінімум функції (рис. 7).

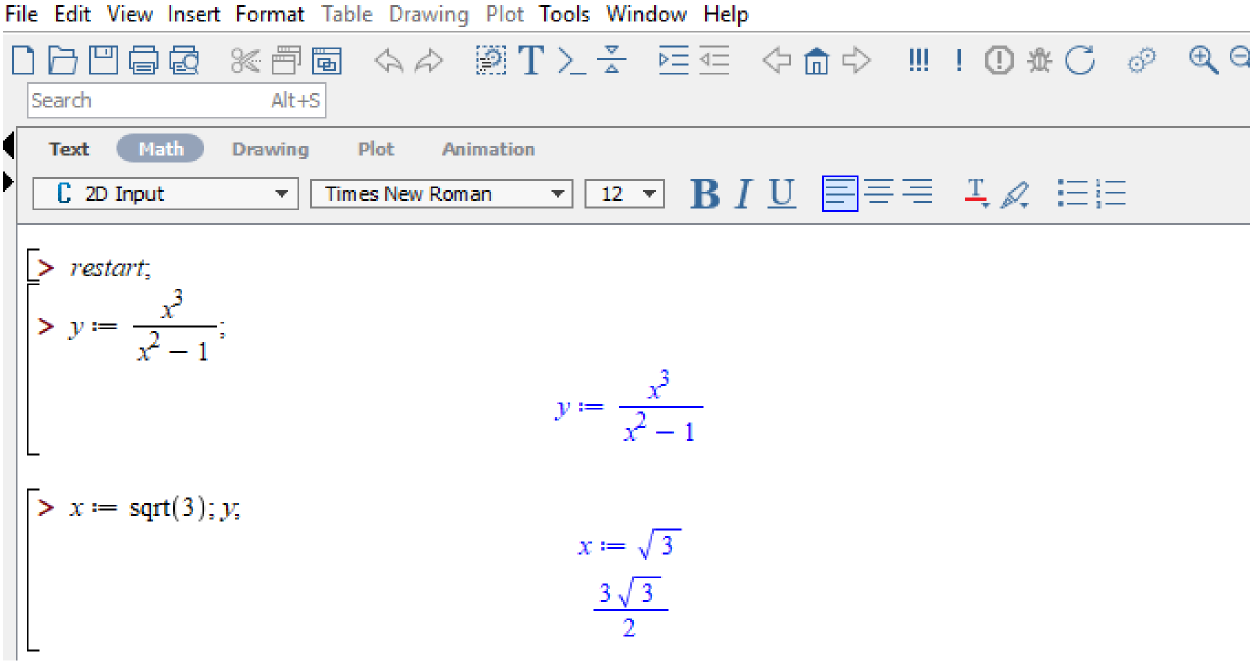

Рис.7. Обчислення значення функції в точці мінімуму

8. Знаходимо проміжки опуклості графіка функції.

Знайдемо y'': $y'' = \frac{x^2-1\ ^2\ 4x^3-6x\ -\ x^4-3x^2\ 2\ x^2-1\ 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Розв’яжемо нерівність $y'' > 0$: $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} > 0$.

Враховуючи ОДЗ та додатній множник $(x^2 + 3)$, дістанемо $\frac{2x}{x^2-1} > 0$

Розв’язавши нерівність, маємо: в інтервалі $\ 1; \infty\ $ крива опукла вниз, а в інтервалі $(0; 1)$ – опукла вгору.

Запис в програмі Maple:

>y1:=diff(x^3/(x^2-1),x$2);

>solve(y1>0,x);

>solve(y1<0,x);

9. Точки перегину.

Розв'язуємо рівняння $y'' = 0$: $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$.

Звідси x$=0$.

Запис в програмі Maple:

>y1:=diff(x^3/(x^2-1),x$2);

>solve(y1=0,x);

Маємо єдиний дійсний корінь 0. Знаходимо знак похідної при переході через цю точку:

>x:=-2: y1;

>x:=2: y1;

Отримуємо результат, що при переході через точку x=0 друга похідна змінює знак на протилежний, тому точка O(0;0) є точкою перегину.

10. Знаходимо похилі асимптоти.

Обчислюємо $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ і $\lim_{x\to+\infty}\ f\ x\ -kx$:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1\ x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$

$\lim_{x\to+\infty}\ f\ x\ -kx\ = \lim_{x\to+\infty}(\frac{x^3}{x^2-1\ x} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0.$

Отже, k=1, b=0.

В математичному пакеті Maple:

>restart;

>y:= x^3/(x^2-1);

>k:=limit(y/x,x=infinity);

>b:=limit(y-k*x,x=infinity);

>y:=k*x+b;

У відповіді отримаємо рівняння похилої асимптоти y=x (рис. 8).

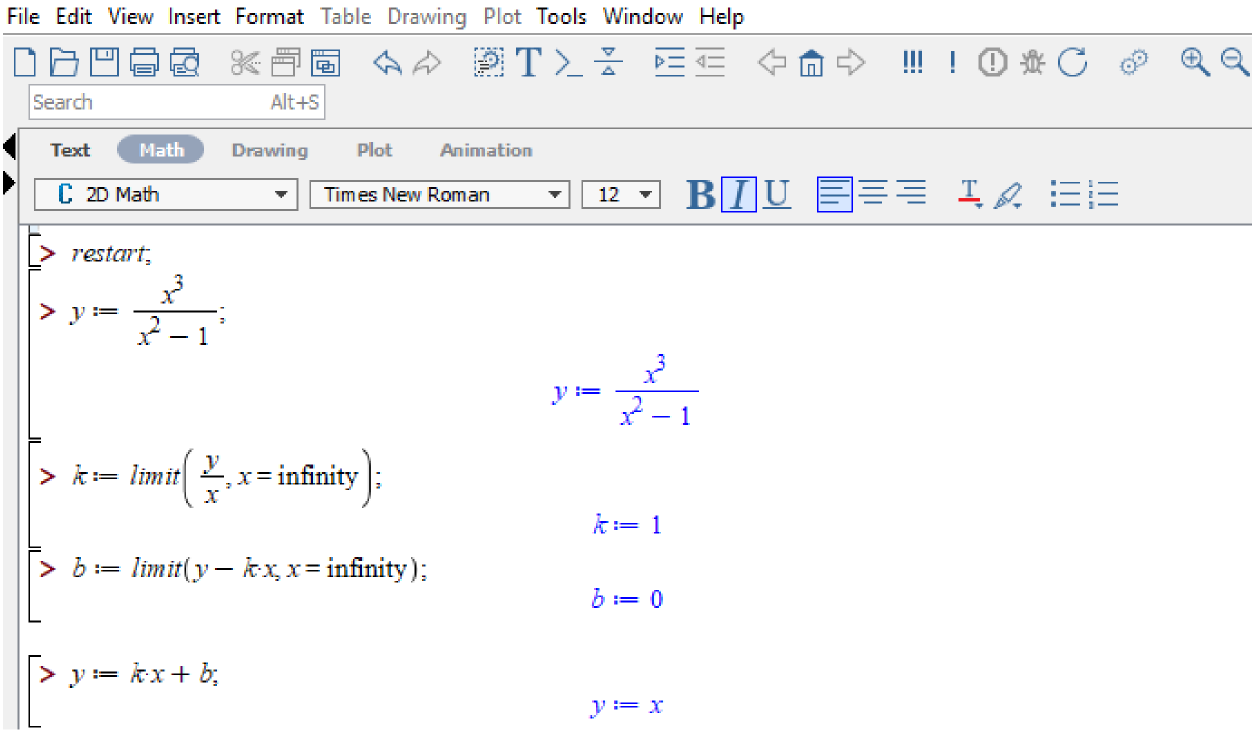

Рис. 8 .Знаходження похилої асимптоти в Maple

11. Будуємо графік функції (рис. 9).

В програмі Maple:

>plot(x^3/(x^2-1),x=-10..10);

На жаль, при побудові графіків ця програма не враховує асимптоти, вона або не будує їх, або взагалі виводить як графік функції. Тому потрібно бути дуже уважним в цьому випадку (рис. 9).

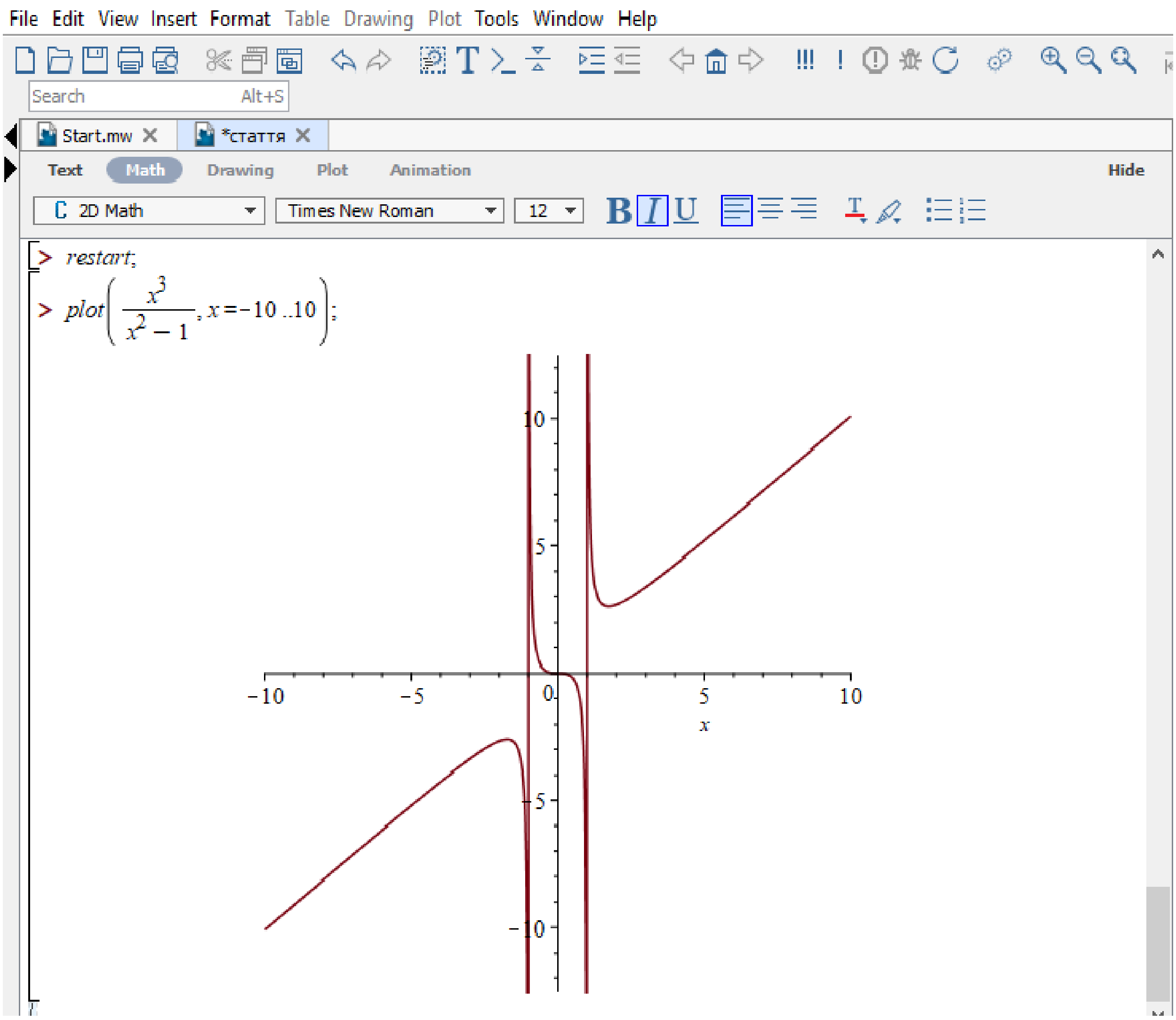

Рис.9. Побудова графіка функції в Maple

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Працювати з описаним вище програмним засобом, при умові знання команд, легко. Це дозволяє швидко отримати результати обчислень і за короткий час розв’язати більшу кількість задач, ніж це можна було б зробити на папері або на дошці. За необхідності, завдання, розв’язанні звичайним способом, можна перевірити в математичному пакеті або використовувати програму як окремий вид завдання на уроках і вдома. Maple реалізує різноманітні варіанти математичних графіків. Тому його зручно використовувати на уроках математики, зокрема на уроках з теми: «Дослідження функції та побудова її графіків»

Сучасне уявлення про якісну математичну освіту передбачає таку важливу складову навчального процесу, як застосування інформаційно-комп'ютерних технологій математичного призначення, а тому використання математичних пакетів на уроках математики в старшій школі дозволяє: більш наочно і зрозуміло подати теоретичний матеріал; дозволяє виконати перевірку виконаних обчислень; забезпечує багаторівневий процес навчання. Отже, сприяє підвищенню пізнавального інтересу і головне – дозволяє зробити процес навчання більш швидким і змістовним.

Список літератури

1. Жалдак М.І Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики// Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. Наук. Праць/Редкол. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. – Вип 7. – 2003. – с. 3-16.
2. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики: [монографія] / Юрій Васильович Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400с.
3. Шкіль М.І. Математичний аналіз: В 2 т. – К.: Вища школа, 2005. – Т.1., 446 с.