УДК [37.016:514](075.3)

МНОГОГРАННІ КУТИ У ГЕОМЕТРІЇ ТРИВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ ТА У КУРСАХ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ ЗАКЛАДІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Любчак Анастасія

Науковий керівник: канд.ф -м. наук, доцент Синюкова О.М.

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», м. Одеса, Україна

У роботі проаналізовані різні підходи до побудови теорії двогранних кутів і n-гранних кутів, n ϵ N, n≥3, у геометрії тривимірного евклідового простору та у курсах геометрії для закладів середньої освіти. Висвітлені наявні розбіжності у означеннях основних понять і методиках їх введення. На підставі проведеного аналізу відповідних підручників, навчальних посібників та певних видань монографічного характеру запропоновано методику розкриття вищевказаних понять у межах цілісної концепції. Така методика, безумовно, вимагає подальшої апробації у реальному навчальному процесі.

Ключові слова: евклідова геометрія, двогранний кут, тригранний кут, многогранний кут, методика єдиної концепції.

Polyhedral angles in Geometry of the three-dimensional Euclidean space and in courses of Euclidean Geometry of institutions of secondary education

A. Lyubchak

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Senior lecturer Sinyukova H. N.

State institution «Souse Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky», Odesa, Ukraine

Different approaches to construction in the three-dimensional Euclidean Geometry and in courses of Euclidean Geometry of institutions of secondary education the theories of dihedral angles and n-hedral angles, n ϵ N, n≥3, are analyzed in the work. The existence of divergences in definitions of the basic notions and methods of their introduction are indicated. As a result of the analysis of the corresponding textbooks, trainings aids and some editions of monographic character a special approach to the introduction of the mentioned notion from the common point of view is suggested. There is no doubt that the approach needs a subsequent approbation in a practical teaching-learning process.

Key words: Euclidean Geometry, dihedral angle, triangular angle, polyhedral angle, approach from the common point of view.

Постановка проблеми. Починаючи з 2018 – 2019 навчального року учні старшої середньої школи, яка є профільною, вивчають математику за трьома профілями: стандарт, профільний, профільний з початком вивчення математики на поглибленому рівні з восьмого класу. Згідно затверджених програм, з поняттям про двогранний кут і елементами відповідної теорії учні всіх профілів знайомляться у другому півріччі десятого класу [6]. Для учнів, які вивчають математику за профілем стандарту, знайомство з поняттям про тригранний кут, і, в загалі, про n-гранний кут, $n\in N$, $n\geq 3$, програмою не передбачене взагалі. Для учнів, які опановують математику згідно програми профільного рівня, подібне знайомство віднесене на початок одинадцятого класу. Згідно програми профільного рівня з початком вивчення математики на поглибленому рівні з восьмого класу, початкові елементи теорії многогранних кутів розглядаються вже у десятому класі, до змісту навчального матеріалу одинадцятого класу входить достатньо цілісна теорія тригранних кутів.

На відміну від теорії двогранних кутів, вже теорія тригранних кутів для учнів старшої середньої школи (і для їх вчителів…) майже завжди здається занадто складною. А теорія многогранників традиційно складає більшу частину обов'язкового курсу стереометрії. А кут при вершині кожного многогранника є, принаймні, тригранним кутом.

Практико-орієнтоване навчання є одним з найактуальніших сучасних освітніх трендів. Многогранники і многогранні кути представляють собою математичні абстракції найпоширеніших просторових форм безпосередньо оточуючого нас середовища. Теорія многогранних кутів містить і теорію існування подібних кутів, практико-значущій характер якої важко переоцінити.

Різні сучасні підручники з геометрії для закладів середньої освіти демонструють різні підходи до висвітлення поняття про многогранний кут (див, наприклад, [1;2;3]). Додаткових сучасних інформаційно-довідкових джерел із цільної теорії n-гранних кутів, $n\in N$, $n\geq 2$, для вчителів математики закладів середньої освіти не існує. А потреба в них є. Характер навчання у першу чергу визначається змістом навчання.

Мета даної роботи полягає у тому, щоб на підставі проведеного аналізу відповідних підручників, навчальних посібників та видань монографічного характеру, розробити найбільш доцільний з точки зору автора варіант побудови у курсах геометрії закладів середньої освіти цілісної теорії двогранних і многогранних кутів.

Аналіз досліджень і публікацій. Аналіз різних джерел з евклідової геометрії, як монографічного, так і навчального характеру [1;2;3;4;5;6] показав, що більшість авторів вважають за потрібне, як це і передбачено навчальною програмою, відокремити теорію двогранних кутів від теорії n-гранних кутів, $n\in N$, $n\geq 3$. І для цього існує суттєве математичне підгрунття.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Зупинимося, спочатку, на означенні двогранного кута, точніше, на відмінах у цьому означенні. У першу чергу, такі відміни пов'язані з прийнятим у тій чи іншій аксіоматичній теорії евклідової геометрії означенням півплощини. Зрозуміло, що для кожної півплощини існує однозначно визначена межа. Але, згідно одних теорій (наприклад, [1; 3]) межа півплощини півплощині належить, згідно інших (наприклад, [2]) – ні. У першому випадку доцільним є наступне означення: «Двогранним кутом називається геометрична фігура, утворена двома півплощинами зі спільною межею», у другому – «Двогранним кутом називається геометрична фігура, утворена прямою і двома півплощинами, для яких ця пряма є межею». Обидва означення є цілком рівносильними, але перше підходить лише для своєї, першої, теорії. Друге – для першої теорії є надлишковим. Існують підручники (наприклад, [5]), у яких вимагають, щоб вказані півплощини не належали одній площині. Тобто, з поняття про двогранний кут виключають поняття розгорнутого двогранного кута. (У планіметрії тоді, відповідно, з поняття про кут виключають поняття про розгорнутий кут.) При всіх варіантах означення мова йде про так званий кут-оболонку. Поняття про двогранний кут вважається аналогом планіметричного поняття про кут-каркас. У евклідовій планіметрії два кути-каркаси мають однакові градусні міри тоді та тільки тоді, коли вони суміщаються за допомогою певного руху. Це твердження є підставою до існування двох підходів до означення рівних кутів. Теорія вимірювання двогранних кутів будується за аналогією до теорії вимірювання кутів-каркасів. Автори підручників вважають за доцільне зробити обидві теорії природним чином узгодженими між собою. Отже, спеціальний еталон міри для двогранних кутів не вводять, означують поняття про лінійний кут двогранного кута (як кут-каркас), двогранні кути вимірюють за допомогою їх лінійних кутів. При цьому, зрозуміло, доводять теорему про те, що всі лінійні кути одного і того ж двогранного кута є рівними між собою. У означенні лінійного кута двогранного кута підручники також розрізняються між собою. Відомим є два варіанти означень (див., наприклад, [1] і [5]), обрання того чи іншого варіанту пов'язане із загальною схемою побудови відповідної теорії. Перший варіант передбачає, що тема перпендикулярності прямої до площини буде передувати означенню лінійного кута двогранного кута, другий – подібного передування не вимагає. Обидва означення є еквівалентними між собою.

У евклідовій стереометрії поняття про тригранний кут можна вважати аналогом поняття про трикутник-каркас (так само, як поняття про n-гранний кут, $n\in N$, $n>3$, можна вважати аналогом поняття про n-кутник-каркас).

Нехай задано довільний трикутник-каркас ABC і точку P, що не належить площині цього трикутника. Тригранним кутом $PABC$ називають геометричну фігуру, утворену всіма променям з початком у точці P,які перетинають сторони трикутника ABC. Це означення трикутного кута-оболонки. Саме про такий підхід як один з можливих підходів йде мова у підручнику [5]. Наведене означення є достатньо зручним. У той же час воно не є аналогічним до вищенаведеного означення двогранного кута. Зрозуміло, що повної аналогії і бути не може. Як і будь-які дві геометричні фігури, два тригранних кути називаються рівними, якщо існує рух, який переводить один з них у інший. Досліджують ознак рівності тригранних кутів. Але у загальному випадку для рівності двох тригранних кутів рівність одного скалярного параметру не є достатньою. Тут можна говорити про аналогію між поняттями плоского кута, як кута, визначеного відрізком AB і точкою P, що не належить прямій AB, тригранного кута-оболонки і подалі, – n-гранного кута-оболонки, $n \in N$, $n>3$. Поняття розгорнутого плоского кута, зрозуміло, у подібну послідовність не вписується. У той же час саме такий підхід до введення поняття про n-гранний кут, $n \in N$, $n \geq 3$, здається автору найбільш доцільним.

Можна, зрозуміло, за вищенаведеною схемою визначити тригранний і взагалі n-гранний, $n \in N$, $n \geq 3$, кут-каркас. Можна вести розмову і про кут-тіло. Останній варіант, наприклад, запропоновано, у підручнику [3]. Підручник [5] містить достатньо складне означення многогранного кута, під яке підходить і двогранний кут. Здається, з методичної точки зору, це дуже добре. Але автори підручника [5] миттєво підкреслюють, що, в силу невизначеності для двогранного кута положення вершини, двогранний кут виключають із множини многогранних кутів.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Проведений аналіз дозволяє зробити припущення, що у курсі геометрії закладів середньої освіти, теорію тригранних і взагалі n-гранних кутів варто відокремити від теорії двогранних кутів, розглядати як окрему теорію, побудовано за певною аналогією до теорії трикутників, і, взагалі, многокутників. Зрозуміло, що така методика вимагає подальшої ретельної розробки і апробації у реальному навчальному процесі.

Список літератури

1. Нелін Є. П., Геометрія (профільний рівень): підруч. Для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, - Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 240 с. : іл.
2. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. Для 10-11 кл. серед. шк. – 6-те вид. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.
3. Тадеєв В. О., Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В. І. Михайловського. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 384 с.
4. Адамар Ж. Элементарная геометрия: Пособие для учителей средней школы – Москва: «Просвещение», 1961. – 760 с.

5. Александров А. Д., Геометрия для 10-11 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математикии / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва: «Просвещение», 1992. – 464 с.

6. Перепёлкин Д. И., Курс элементарной геометрии (геометрия в пространстве): Учебное пособие – Москва: «ГИТТЛ», 1951. – 348 с.

7. Освітні програми https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna_serednya_osvita/navchalni_programi