УДК 373.5.016:514:004

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ ТА ЇЇ ПРАКТИЧНА СПРЯМОВАНІСТЬ

Літвін Ігор

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук, доцент Яременко Ю.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація: *В статті розглянуто теоретичні та дидактичні питання навчання теми «Інтеграл та його застосування» в шкільному курсі математики. В роботі наводяться різні підходи до поняття визначеного інтеграла з позицій розв'язування прикладних економічного, фізичного, механічного та геометричного характеру. Для підвищення ефективності засвоєння основних понять теми пропонується ряд практичних задач.*

Ключові слова: *методика, дидактика, визначений інтеграл, прикладні задачі, підвищення ефективності.*

Method of study theme "Integral" at school course mathematics and its practical orientation

Litvin Igor

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, assistant professor Yaremenko Yu.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

Annotation: *The article contains theoretical and didactic questions of studying the subject "Integral and its application" in the school course of mathematics. Different approaches to the concept of a definite integral from the point of view of applied economic, physical, mechanical and geometric character are presented in the paper. To improve the efficiency of assimilation of the basic concepts of the subject, a number of practical problems are proposed.*

Keywords: *methodology, didactics, integral, application tasks, improving the efficiency of training.*

Постановка проблеми. Курс "Алгебри та початків аналізу", що вивчається в старшій школі, є пропедевтикою для вивчення курсів "Вища математика", "Математичний аналіз" у закладах вищої освіти, головною особливістю яких є практична спрямованість для суміжних дисциплін. Від успішного засвоєння основних понять аналізу в школі залежить їх подальше вивчення та сприйняття зв'язків математики із іншими галузями науки.

Згідно програми [7] у старших класах загальноосвітніх шкіл вводяться основні поняття математичного аналізу такі як “границя”, “похідна” та “інтеграл”, але зміст навчання є нерівномірно розподіленим. Наприклад, основні поняття теорії множин та диференціального числення вводяться в 10-му класі, а поняття первісної та інтеграла пропонують вивчати у 11-му класі. Така непослідовність ускладнює розуміння та уявлення учнями зв'язків між окремими темами та їх практичне значення у прикладних проблемах. Також ще однією із головних проблем при вивченні даних понять є їх високий рівень абстрактності, що ускладнює сприйняття наведених понять та знижує зацікавленість учнів.

На даний момент вивчення теми “Визначений інтеграл” в середній школі містить багато проблем методичного характеру, що виражається у формальності засвоєних знань та відриву від практичних задач, а також наявністю протиріч між науковим викладом теми та її доступністю. Одним із способів подолання цих проблем є використання математичних моделей. В цьому полягає актуальність обраної теми дослідження.

Об'єктом дослідження є елементи математичного аналізу у старшій школі, а предметом — математичні моделі, що демонструють застосування визначеного інтеграла в математиці, фізиці, механіці та економіці. Проблема дослідження зумовила вибір наступних завдань:

- підбір теоретичного матеріалу по темі;
- розробка факультативного курсу, що може бути використаний для поглиблення знань учнів з теми “Невизначений та визначений інтеграл”, чи як методичні рекомендації для для виконання науково-дослідної роботи у системі Малої академії наук України, чи при підготовці до олімпіад з математики;
- формування систем вправ, що забезпечать міцне засвоєння учнями основних прийомів рішення задач;

- розгляд основних моделей фізичних, механічних та економічних явищ, що базуються на понятті визначеного інтеграла.

Аналіз досліджень і публікацій. Проблеми та особливості навчання у шкільному курсі математики елементів математичного аналізу досліджувалися у роботах багатьох дослідників, зокрема М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, А.Г Мордкович, Г.В. Дорофєєв, О.М. Астряб, Г.П. Бевз, М.І. Бурда, О.С. Дубінчук, З.І. Слєпкань, І.Є. Шиманський, Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець, Ю.В. Ботузова та багато інших. Зокрема, у [3] досліджуються методичні особливості вивчення теми "Визначений інтеграл" у старшій школі з використанням онлайн-сервісів і програмних продуктів. В роботах [6, 9, 10] досліджуються можливості вивчення прикладних задач природничого характеру в курсі алгебри та початків аналізу.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Пізнавальний інтерес до навчання математики найкраще активізувати за допомогою розв’язування прикладних задач. Якщо говорити про поняття “визначений інтеграл”, то доцільно розглянути такі його застосування

- задачі олімпіадного характеру;
- задача про обчислення площ, довжин, об'ємів тощо;
- задача про обчислення роботи змінної сили;
- задача про обчислення пройденого шляху;
- задача про обчислення маси і координати центру ваги неоднорідного стержня;
- задача про обчислення тиску рідини на вертикально занурену пластину;
- задачі про приріст капіталу, обсяг продукції, величину попиту-пропозиції, обчислення коефіцієнта Джинні, що зображує частку величини y, що зосереджується на x % популяції з найменшим значенням цієї величини, тощо.

Основні вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики є такими:

- наявність реального практичного змісту в задачах;

- відповідність задач шкільній програмі;
- враховуючи практичність сучасних старшокласників задачі мають бути для них значущими;
- прикладні задачі повинні відображати ситуації виробництва, різних галузей економіки, торгівлі, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей;
- при розв’язанні прикладних задач у математичних гуртках, МАН їх формулювання може бути розширене і являти собою деяке теоретичне зведення до проблеми, що вивчається. Сама проблема може мати багатоступеневе розв’язання, при якому кожний наступний етап розвиває і доповнює попередній.

Розглянемо основні підходи, до введення поняття “Визначений інтеграл” в школі [8].

Перший підхід полягає у розгляді конкретної прикладної задачі і на основі верхніх та нижніх інтегральних сум Дарбу вводиться поняття визначеного інтегралу, доводяться деякі його властивості та умови існування. Наступним кроком вводиться інтеграл зі змінною верхнею межею, його основні властивості, вводиться поняття первісної та формула Ньютона-Лейбніца.

Другий підхід полягає у введенні поняття первісної неперервної функції на проміжку та правил її знаходження. Наступним кроком є введення поняття невизначеного інтеграла, його властивості та методи обчислення і вже тоді вводиться поняття визначеного інтегралу, його властивості, існування та обчислення.

Відмітимо, що в шкільних підручниках та в багатьох вузівських підручниках з математичного аналізу перевага надається другому підходові. Розглянемо особливості кожного з підходів. Однією з переваг першого підходу є його тісний зв'язок із життям, учням пропонується розв'язати конкретні прикладні задачі, які є їм цікаві та актуальні, а недоліком є значний обсяг часу для викладу теми, учні втомлюються та втрачають інтерес до теоретичної частини.

В той же час другий підхід позбавлений недоліків першого, учням запропоновано відповідну теоретичну базу і витрати часу є оптимізовані і більше часу відводиться на розгляд задач. Але на жаль такий розгляд не дає змоги повністю розкрити ідейну сторону та практичне значення визначеного інтегралу.

Наведемо деякі практичні задачі, в основі яких лежить поняття визначеного інтегралу. Також відмітимо, що визначений інтеграл можна також застосовувати в багатьох задачах із економічним змістом, зокрема в задачах на знаходження функції витрат за заданою функцію граничних витрат, в задачах про дисконтну вартість грошового потоку; про максимізацію прибутку стосовно часу; про залежність відсотка доходів від відсотка осіб та інші.

1. Задачі економічного характеру [2, 5]

Нехай деяке підприємство (фірма) виробляє продукцію з інтенсивністю (продуктивністю праці) $f(t)$. Знайдемо обсяг продукції Q, вироблений за проміжок часу $0,T$.

Зазначимо, що коли продуктивність не змінюється протягом часу (тобто $f(t)$ – стала функція), то обсяг продукції ΔQ, виробленої за деякий проміжок часу $t, t+\Delta t$ задається формулою $\Delta Q = f(t)\Delta t$. У загальному випадку, тобто коли $f(t)$ – довільна функція, справедлива наближена рівність: $\Delta Q \approx f(\text{ñ})\Delta t$, де $\text{ñ} \in \ t, t+\Delta t$. Ця наближена рівність буде тим точніша, чим меншим буде Δt.

Нехай функція $f(t)$ визначена на відрізку $0,T$, де $T > 0$. Розіб’ємо цей відрізок на n довільних частин точками: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$.

Для обсягу продукції ΔQ_i, виробленої за проміжок часу t_{i-1}, t_i , маємо наближену рівність $\Delta Q_i \approx f(\text{ñ}_i)\Delta t_i$, де $c_i \in \ t_{i-1}, t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ – довжина відрізка t_{i-1}, t_i , $i = 1,2, \ldots, n$.

Отже, увесь обсяг продукції Q, вироблений за проміжок часу $0,T$, можна наближено знайти за формулою $Q \approx \ {}_{i=1}^{n} Q_i = \ {}_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i$.

Нехай $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i$. Якщо $\lambda \to 0$, то кожна з використаних наближених формул стає більш точною. Переходимо до границі інтегральної суми ${}_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i$ при $\lambda \to 0$ і отримаємо точну формулу: $Q = \lim_{\lambda \to 0} \ {}_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i$.

Враховуючи означення визначеного інтеграла, дістанемо $Q = \int_0^T f(t)dt$.

Таким чином, якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент t, то $\int_0^T f(t)dt$ – обсяг виробленої продукції за проміжок часу $[0,T]$.

Отже, економічний зміст визначеного інтеграла такий: визначений інтеграл $\int_0^T f(t)dt$ чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції з продуктивністю праці $f(t)$ за проміжок часу $[0,T]$.

Дану формулу можна узагальнити на випадок проміжку часу $[t_1,t_2]$, а саме: $Q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, яка виражає обсяг продукції Q, вироблений за проміжок часу $[t_1,t_2]$, де $t_2 > t_1 > 0$.

Приклад 1. Продуктивність праці бригади виражається формулою

$f(t) = 8t - t^2$. Бригада працює 8 год. Обчислити обсяг виробленої продукції: а) за весь робочий день; б) за проміжок часу $t \in [2;6]$; в)порівняти ці обсяги у відсотковому відношенні.

В економічній теорії, яка враховує технічний прогрес, виробнича функція Кобба -Дугласа має вигляд

$$f(t) = A \times L^{\alpha} \times K^{\beta} \times e^{\lambda t},$$

де λ – інтенсивність розвитку виробництва, пов’язаного з технічним прогресом, A, α, β – додатні постійні числа, що характеризують технологію виробництва, L – індекс зайнятості в обробній промисловості, K – індекс постійного капіталу, $e^{\lambda t}$ – фактор, що відображає вплив технічного прогресу та інших факторів на обсяги виробництва.

Тоді згідно з економічним змістом функції Кобба-Дугласа можна показати, що обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = T$ визначається за формулою $Q = \int_0^T f(t)dt$.

Якщо вважати, що витрати капіталу сталі, а витрати трудового ресурсу лінійно залежать від часу, то формула $f(t) = A \times L^{\alpha} \times K^{\beta} \times e^{\lambda t}$ набуває вигляду $f(t) = (at + b)e^{\lambda t}$.

У цьому випадку обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = T$ визначається за формулою

$$Q = \int_0^T (at+b)e^{\lambda t}dt.$$

Приклад 2. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $f(t) = (1+t)e^{3t}$, де t – час у роках.

Розглянемо задачу визначення капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Чисті інвестиції (капіталовкладення) – це загальні інвестиції, які надходять в економіку за певний проміжок часу (зазвичай за рік), із відрахуванням інвестицій на відшкодування основних фондів (витраченого капіталу). Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на обсяг чистих інвестицій.

Позначимо капітал, який залежить від часу t, через $K = K(t)$, а обсяг чистих інвестицій – через $I = I(t)$. Тоді описане вище можна подати у вигляді рівності $I(t) = K'(T)$, тобто чисті інвестиції $I(t)$ – це похідна від капіталу $K(t)$ за часом t.

Часто в економічних дослідженнях доводиться знаходити приріст капіталу за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, де $b > a > 0$, тобто $\Delta K = K(b) - K(a)$. Оскільки $K = K(t)$ є первісною для функції $I = I(t)$, то, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, яка пов'язує первісну з визначеним інтегралом $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(x)|_a^b$, можна записати

$$\Delta K(a;b) = K(b) - K(a) = \int_a^b I(t)\,dt.$$

2. Задачі фізичного та механічного характеру [10]

Нехай матеріальна точка рухається по прямій під дією сталої сили *P,* що діє вздовж тієї самої прямої. Якщо точка пройшла шлях s, то, як відомо з фізики, виконана при цьому робота дорівнює добутку *Ps*.

Нехай тепер рух матеріальної точки вздовж осі *Ox* відбувається під дією змінної сил *f(x),* яку вважатимемо неперервною функцією. Покажемо, що коли матеріальна точка під дією сили *f (x)* пройшла шлях від точки з координатою *a* до точки з координатою b, то виконана при цьому робота дорівнює: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Приклад 3. Щоб розтягнути пружину на 10 *см*, треба прикласти силу в *2Н*. Яка робота буде виконана при розтягуванні пружини на 5 *см*?

Приклад 4. Обчислити силу тиску води на прямокутні ворота шлюза, що мають ширину a і висоту h, якщо верхній край шлюзу знаходиться на поверхні води. Обчислення виконати для $a = 30$ *м*, $h = 20$ *м*.

Список використаної літератури

1. Апанасов П.Т., Апанасов Н.П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. / П.Т. Апанасов, Н.П. Апанасов – М.: Просвещение, 1987. – 110 с.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. Навч. посіб. / В.В. Барковський, Н.В. Барковська– К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.

3. Ботузова Ю. В. Методичні особливості вивчення теми "Визначений інтеграл" у старшій школі з використанням онлайн-сервісів і програмних продуктів / Ю. В. Ботузова // Педагогіка вищої та середньої школи. – 2015. – Вип. 46. – С. 100-107. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/PVSSh_2015_46_21.

4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.:А.С.К., 2001. – 648с.

5. Застосування диференціальних рівнянь в економічному аналізі. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів 1-го курсу економічних спеціальностей ОКР "Бакалавр"/Упор.: М.В. Шмигевський, Л.С. Попова. К.: – 2012. – 91 с.

6. Крамаренко Т. Г. Прикладні задачі у навчанні математики: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко, М. В. Михайловська. – КДПУ, 2018. – 156 с. – Режим доступу : http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/

7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ, 2017. – 64 с.

8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. / З.І. Слєпкань – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

9. Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри та початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

10. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. / Н.А. Терешин – М.: Просвещение, 1990 – 126 с.