УДК 532.59

КОНСТРУЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ, ЯК ЗАДАЧ ЗВОРОТНЬОГО МИСЛЕННЯ

Кукуєва Анастасія

Науковий керівник: професор Кушнір В.А.

Анотація*: Досліджується проблема конструювання раціональних рівнянь і систем лінійних рівнянь. На сьогодні в навчальний процес усе частіше впроваджуються «задачі зворотного мислення» (В.А.Крутецький) або просто «зворотні задачі» (П.М.Ерднієв). Задачі конструювання математичних завдань заздалегідь визначеного виду і з визначеними властивостями є зворотними завданнями, котрі розгортають ще один аспект навчальної ситуації і тим самим створюють «надлишок її бачення» (М.М.Бахтін). Розв'язування зворотних задач розвивають у студентів чи учнів мислення, уяву та інші вищі психічні функції. Однак їх упровадження в навчальний процес ще недостатнє.*

Конструювання в «ручному режимі» вимагає значних часових, когнітивних, фізичних та інших затрат, несе в собі ризики технічних та обчислювальних помилок.

Раціональні рівняння і системи лінійних рівнянь є одними із завдань, розв'язання котрих вимагає від суб'єктів учіння творчості, зокрема нестандартного підходу до розв'язування. Кожне рівняння та система вимагає свого окремого способу й алгоритму розв'язування і тому вимагає продуктивного учіння, що не вписується в стандартні способи й алгоритми. Стаття присвячена розв'язуванню наведених проблем.

***Ключові слова:**, алгоритм, генеруємо, матриця, система лінійних рівнянь, раціональні рівняння, ранг.*

Designing of mathematical problems, as problems of reverse thinking

Kukuieva Anastasia

Scientific supervisor: Professor Kushnir V.A

Annotation: The problem of constructing rational equations and systems of linear equations is investigated. Today, the "reverse thinking" tasks (V.A.Kruteckiy) or simply "inverse problems" (P.M. Erdniiev) are increasingly being implemented in the educational process.

The tasks of constructing mathematical tasks of a predefined kind and with certain properties are inverse tasks that develop another aspect of the educational situation and thereby create an "excess of its vision" (M.M. Bakhtin). Solving reverse problems develops students` thinking, imagination and other higher mental functions. However, their implementation in the educational process is still insufficient.

Designing in "manual mode" requires cognitive, physical and other expenses. It also requires significant time, carries the risks of technical mistakes, and carries the risk computational errors.

Rational equations and systems of linear equations are among the tasks whose solution demands creativity, the non-standard approach to solving. Each equation and system requires its own method and algorithm for solving, and therefore requires productive learning that does not fit into standard methods and algorithms. The article is devoted to solving these problems.

Keywords:, algorithm, generate, matrix, system of linear equations, rational equations, rank.

Актуальність проблеми. Сучасна математична освіта все більше схиляється до фундаментальності в змісті й до продуктивної діяльності учнів і студентів. Особливо це стосується ліцеїв і шкіл з поглибленим вивченням математики й інформатики, вищих педагогічних навчальних закладів. Саме оптимальне поєднання математики й можливостей сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) при її навчанні дозволяє створювати технології автоматичного конструювання достатньої кількості завдань з математики заздалегідь визначеного виду й властивостями, що надає можливість здійснювати ефективне індивідуальне навчання, створювати достатню кількість варіантів тестових однотипних завдань, надавати індивідуальні завдання підвищеної складності.

До завдань підвищеної складності відносяться рівняння та системи рівнянь зокрема,раціональні рівняння та системи лінійних рівнянь. Такі завдання вимагають знань не тільки способу й відповідного алгоритму розв’язування, а й дослідження існування та кількості розв’язків та їх відшукання. Тоді процес розв’язування рівнянь (систем) носить пошуково-дослідницький характер, учіння формує в учня чи студента початкові дослідницькі уміння і навички, зокрема уміння і навички конструювання і виконання дослідницьких дій.

Предметом дослідження є процес конструювання раціональних рівнянь і систем лінійних рівнянь.

Мета дослідження полягає в створенні способів, алгоритмів конструювання раціональних рівнянь і систем лінійних рівнянь.

Завдання дослідження:

Створення способів і відповідних алгоритмів конструювання раціональних рівнянь і систем лінійних рівнянь.

Виклад основного матеріалу

1. Конструювання раціональних рівнянь.

У статті пропонується сконструювати раціональне рівняння, де $R = \frac{P_n}{Q_n}$ - раціональна функція, P_n , Q_n- многочлен n-го степеня з наперед заданими властивостями, а саме:

1) Рівняння має три різні прості корені;
2) Рівняння має два прості корені і один двохкратний;
3) Рівняння має один корінь третьої кратності.

Раціональним називається рівняння в якому ліва і права частина є раціональними виразами.

Дробово-раціональним рівнянням називається таке раціональне рівняння, у якому ліва і права частини є дробовими виразами.

Основний спосіб розв'язування дробово-раціональних рівнянь зводиться до заміни його рівносильного перетвореннями до такого вигляду: ліва частина рівняння –це дробовий вираз , а права – нуль.

$$\frac{P_n}{Q_n} = 0$$

Розв'язують одержане рівняння враховуючи правило: дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює. Рівняння рівносильне системі:

$$P_n = 0$$
$$Q_n \neq 0$$

Отже, прирівнюємо чисельник до нуля і знаходимо корені . Знаменник не дорівнює нулю і знаходимо корені. Порівнюємо їх і відкидаємо ті, що не задовольняють умову.

1 –ий випадок (3 різні прості корені):

Візьмемо многочлен 3-го степеня:

$$\frac{P_3}{Q_n} = 0$$

$$P_3 = 0$$
$$Q_n \neq 0$$

$$P_3 = 0$$

$$P_3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Алгоритм 1:

1)Генеруємо $x_1, x_2, x_3 \in [-4; 4]$.

2)Якщо $x_1 = x_2,\ x_2 = x_3, x_1 = x_3, x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0$ то йти до 1).

3)Записуємо многочлен $P_3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

4)Розкриваємо дужки в P_3.

5) Друкуємо рівняння $P_3 = 0$.

6) Якщо потрібно сконструювати 5 варіантів рівнянь даного виду, то йти до 1).

7) Кінець роботи алгоритму.

Приклад 1.

$$\mathrm{x}^3 - 5\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 24 = 0$$

$$(2 + x) \cdot (12 - 7x + x^2) = 0$$

$$2 + x = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$12 - 7x + x^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

$$x_3 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

Відповідь: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$.

2 –ий випадок (2 прості корені і один двохкратний):

Візьмемо многочлен 4-го степеня:

$$\frac{P_4}{Q_n} = 0$$

$$P_4 = 0$$
$$Q_n \neq 0$$

$$P_3 = 0$$

$$P_4 = \;\; x - x_1 \quad x - x_2 \quad x - x_3 \;\; ^2$$

Алгоритм 2:

1)Генеруємо $x_1, x_2, x_3 \in \;\; -4; 4 \;\;$.

2)Якщо $x_1 = x_2, \; x_2 = x_3, x_1 = x_3, x_1 = 0, x_2 = 0, \; x_3 = 0$ то йти до 1).

3)Записуємо многочлен $P_4 = \;\; x - x_1 \quad x - x_2 \quad x - x_3 \;\; ^2$.

4)Розкриваємо дужки в P_4.

5) Друкуємо рівняння $P_4 = 0$.

6) Якщо потрібно сконструювати 5 варіантів рівнянь даного виду, то йти до 1).

7) Кінець роботи алгоритму.

Приклад 1.

$$\mathrm{x}^4 + 3\mathrm{x}^3 - \; 7\mathrm{x}^2 - 15\mathrm{x} + 18 = 0$$

3 –ий випадок (1 корінь третьої кратності):

Візьмемо многочлен 3-го степеня:

$$\frac{P_3}{Q_n} = 0$$

$$P_3 = 0$$
$$Q_n \neq 0$$

$$P_3 = 0$$

$$P_3 = \;\; x - x_3 \;\; ^3$$

Алгоритм 3:

1)Генеруємо $x_1, x_2, x_3 \in \;\; -4; 4 \;\;$.

2)Якщо $x_1 = 0$ то йти до 1).

3)Записуємо многочлен $P_3 = (x - x_3)^3$.

4)Розкриваємо дужки в P_3.

5) Друкуємо рівняння $P_3 = 0$.

6) Якщо потрібно сконструювати 5 варіантів рівнянь даного виду, то йти до 1).

7) Кінець роботи алгоритму.

Приклад 1.

$$\mathrm{x}^3 + 9\mathrm{x}^2 + 27\mathrm{x} + 27 = 0$$

$$(x + 3)^3 = 0$$

$$(x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Відповідь: $x_1 = -3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -3$.

2. Конструювання систем лінійних рівнянь

Сконструювати систему лінійних рівнянь з 4-ма невідомими (4x4)

$A \cdot X = B$ (1)

з наперед заданими властивостями , а саме:

1) СЛР має 1 розв'язок;

2) СЛР має безліч розв'язків.

При розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь можливі такі випадки:

а) система має єдиний розв'язок;

б) система має безліч розв'язків;

в) система не має розв'язків.

Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається сумісною, і не сумісною, якщо немає жодного.

Відповідь на питання сумісності системи дає теорема Кронекера-Капеллі: СЛР сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг її основної матриці А дорівнює рангу розширеної матриці$A_p = A|B$, де $A = a_{ij}$ - матриця коефіцієнтів при невідомих, а В – стовпчик вільних членів.

Сумісна система є визначеною (має єдиний розв’язок), якщо ранг дорівнює числу невідомих, і невизначеною (безліч розв’язків), якщо ранг менше числа невідомих.

1-ий випадок (1 розв’язок)

Алгоритм 1:

1)Генеруємо матрицю А(4х5) $\in -4;4$.

2)Виділяємо підматрицю A_1(4х4) матриці А.

3)Рахуємо ранг матриці A_1.

4)Якщо ранг A_1 менше за 4 кількість невідомих , то йти до 1).

5) Генеруємо допоміжний вектор z ; і формуємо вектор $A_2 = A_1 \cdot z$ (стовпчик вільних членів).

6) Формуємо вектор X = $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}$ (стовпчик невідомих).

7) Формуємо матрицю С = A_1□Х

8) Друкуємо СЛР матрицю С прирівнюємо до вектора A_2 (стовпчик вільних членів).

9)Якщо потрібно сконструювати 5 варіантів рівнянь даного виду, то йти до 1).

10)Кінець роботи алгоритму.

Приклад 1.

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 16 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ 2x_2 - 3x_4 = -8 \end{gathered}$$

Відповідь:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2-ий випадок (безліч розв'язків)

Алгоритм 2:

1)Генеруємо y $\in [-3; 3]$.

2)Генеруємо матрицю A(4x5) $\in [-4; 4]$.

3)Виділяємо підматрицю A_2(3x4) матриці A.

4)Рахуємо ранг матриці A_2.

5)Якщо ранг A_2 менше за 3, то йти до 1).

6) Генеруємо коефіцієнти k_1, k_2, k_3

7) Формуємо четвертий рядок СЛР A [4]= $k_1 A[1] + k_2 A[2] + k_3 A[3]$. ($A[4]$ – лінійно залежний від A [1], A[2], A[3]).

8)Записуємо матрицю A з новим четвертим рядком A[4].

9) Виділяємо підматрицю $A_1(4x4)$ матриці A.

10) Формуємо вектор X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ (стовпчик невідомих).

11) Формуємо матрицю A_1□X, що дорівнює п'ятому стовпцю матриці A.

12)Формуємо СЛР матрицю C, що дорівнює добутку A_1□X .

13) Друкуємо СЛР матрицю C прирівнюємо до вектора A (стовпчик вільних членів).

14)Якщо потрібно сконструювати 5 варіантів рівнянь даного виду, то йти до 1).

15)Кінець роботи алгоритму.

Приклад 1.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ -10x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 10 \end{cases}$$

Відповідь:

$$\frac{13}{7} - \frac{83}{21} - t_{1,1}$$
$$2 - \frac{5}{3} - t_{1,1}$$
$$-\frac{22}{7} + \frac{106}{21} - t_{1,1}$$
$$-t_{1,1}$$

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження:

Конструювання математичних завдань певного виду з заздалегідь заданими властивостями в певному ІКТ-середовищі приводить до формування знань і умінь з математичного моделювання, теорії алгоритмів, що сприяє формуванню інтегративних знань і умінь в учнів чи студентів. Окрім того, технологія такого конструювання дозволяє створити достатню кількість варіантів однотипних задач, зокрема задач.

Розв'зування навчальних проблем «зворотним шляхом» формує навчальну ситуацію з багатоманіттям способів розв'язування що вимагає від суб'єкта розв'язування творчості і на чому наголошував В.А. Крутецький. Стосовно навчальної проблеми конструювання математичних об'єктів, то творчість суб'єкта розв'язування – у створенні нелінійної математичної моделі задачі, її дослідження і пошуку способу розв'язування, створення відповідного алгоритму. Особливо важливо задачі констроювання математичних об'єктів для математично обдарованих учнів чи студентів.

Стаття буде корисна вчителям, учням і студентам, у яких програми з математики є поглибленими і поширеними, а також студентам фізико-математичного факультету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кушнір В.А. Дослідницька діяльність у фундаментальній професійній підготовці майбутніх учителів. Наукові записки, Педагогічні науки, Кіровоградський РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 150, 23-28.
2. Кушнір В.А. (2014). Конструювання навчальних завдань з математики:

математичні моделі, алгоритми, програми. Інноваційні технології в освіті, 18, 030 -041.

3. Кушнір В.А. (2014). Проблеми поєднання фундаментального і інноваційного при вивченні математики у вищих навчальних закладах. Витоки педагогічної майстерності: Зб. наук. праць, Полт. педаг. універ. ім.В.Г.Короленка, 20, 161 – 172.

4. Кушнір В.А. (2015). Тенденції та чинники розвитку математичної освіти та їх відображення в змісті підручників. Проблеми сучасного підручника, зб. наук. праць. К.: Педагогічна думка, 15, 317 – 327.