УДК 371.512

ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Ємельянова Валерія

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті висвітлюються основні методичні прийоми використання пакету комп'ютерної математики ADVANCED GRAPHER для проведення змістовного узагальнення дослідження властивостей функцій через розв'язування рівнянь та нерівностей. В статті робиться висновок про те, що використання засобів інформаційних технологій при формуванні процедурних компетентностей учнів старшої школи є перспективним напрямком подальших науково-педагогічних досліджень.

Ключові слова: процедурна математична компетентність, пакет комп'ютерної математики, рівняння, нерівність, методика.

The use of package of computer mathematics for the generalization of the solutions of equations and inequalities

V. Yemelianova

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article covers the main methodical techniques of using the ADVANCED GRAPHER computer mathematics package for the conduction of a meaningful generalization of the study of the properties of functions through solving equations and inequalities. The article concludes that the use of information technology in the formation of procedural competences of high school students is a promising direction for further scientific and pedagogical research.

Key words: procedural mathematical competence, package of computer mathematics, equation, inequality, methodology.

Постановка проблеми. Методичні дослідження із використання пакетів комп'ютерної математики підтвердили, що комп'ютер – дидактичний засіб, що має великі потенційні можливості для підвищення рівня викладання шкільної математики, ефективності навчання; формування процедурних компетентностей учнів, розкриття й значного розвинення їх творчих здібностей; організації їх самостійної роботи. Цікаві можливості надає використання інформаційних технологій в старшій школі при узагальненнях вивчення рівнянь та нерівностей.

Аналіз досліджень і публікацій. Навчання математики у сучасній старшій школі вимагає впровадження в навчальний процес сучасних інформаційно-комунікаційних технологій навчання, застосування яких суттєво вплине на якість навчання та інтелектуальний розвиток учнів, якщо комп'ютерно-орієнтовані компоненти системи навчання будуть використовуватися не фрагментарно, а систематично як складові інтегрованої системи, яка, крім традиційних складових методичної системи навчання, включає засоби гіпертекстових, мультимедійних та дистанційних технологій, що можуть розглядатися як платформа побудови сучасної комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики. Теоретичним аспектам формування такої системи у шкільному навчанні присвячено праці М. Жалдака [1; 2; 3], В. Клочко [4], О. Пометун [7], О. Співаковського [9] та інших. Особливості застосування пакетів комп'ютерної математики при формуванні математичних компетентностей зазначаються в працях В. Кушніра, Р. Ріжняка [5; 6], С. Ракова [8].

Метою статті є висвітлення методичних прийомів використання пакету комп'ютерної математики ADVANCED GRAPHER для проведення узагальнень розв'язування рівнянь та нерівностей.

Виклад основного матеріалу дослідження. Формування процедурної компетентності учнів при навчанні математики невід'ємно пов'язане з відповідно орієнтованими методичними розробками та навчальними матеріалами. Змістова складова цих матеріалів визначається системою завдань для учнів. Процедурна складова залежить від ефективності використання сучасних засобів та прийомів навчання. Певних результатів можна досягти, якщо системно застосовувати пакети комп'ютерної математики при формуванні складовихпроцедурної компетентності. Наведемо приклад такої задачі.

Задача. Дослідити функцію $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}$ і побудувати її графік.

Спосіб I.

1). Знаменник має корені 1 і 2 , тобто функцію можна представити в вигляді

$$f(x)=\frac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}$$

Тепер легко побачити, що області визначення функції не належать тільки точки 1 і 2: $D(f)=R\setminus\{1;2\}=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$

Область значень $\varepsilon(f)$ знайти без обчислень ми не можемо, знайдемо їх трохи пізніше.

2). Оскільки область визначення $D(f)$ не симетрична відносно точки 0, функція не може бути ні парною, ні непарною. Очевидно також, що вона не періодична (її область визначення не має періодичної структури).

3). Область визначення цієї функції має дві граничні точки: 1 і 2.

При $x\to1$значення чисельника наближається до 1+1=2, а знаменника до 0, тому $f(x)\to\infty$при $x\to1$. Тобто, вертикальна пряма $x=1$ - це вертикальна асимптота графіка$y=f(x)$. При $x\to1-$ (тобто лежить в околі точки 1) чисельник додатній, а знаменник складається з двох від'ємних співмножників, отже $f(x)\to+\infty$ при$x\to1-$. При $x\to1+$ чисельник теж додатній, а в знаменнику множник $x-1$ додатній, а $x-2$ від'ємний. Отримаємо, що $f(x)\to-\infty$ при$x\to1+$.

При $x\to2$ границя чисельника дорівнює 4+2=6, а знаменника -- нулю, тому $f(x)\to\infty$ при $x\to2$. Тим самим, вертикальна пряма $x=2$ є другою вертикальною асимптотою графіка $y=f(x)$. При $x\to2-$ чисельник додатній, а знаменник від‘ємний, оскільки$x-1>0$, а$x-2<0$. Отже $f(x)\to-\infty$ при$x\to2-$. При $x\to2+$ чисельник знову додатній, а в знаменнику обидва множника додатні. Отримаємо, що $f(x)\to+\infty$ при$x\to2+$.

4). Оскільки чисельник и знаменник -- многочлени одного і того ж (другого) степеня, то $f(x)$ має границю при$x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1+0}{1-0+0}=1$$

Звідси слідує, що горизонтальна пряма $y=1$ буде горизонтальною асимптотою графіка як при $x\to-\infty$, так і при $x\to+\infty$. (Шукати похилу асимптоту вигляду $y=kx+b$ і знаходити k і b по загальним формулам нам тепер непотрібно).

5). Знайдемо точки перетину графіка з осями координат. Оскільки $f(0)=0$, то графік перетинає вісь O_y (і, одночасно, вісь O_x) в початку координат.

Прирівнявши чисельник до нуля, отримаємо рівняння $x^2+x=0$, яке має два корені: $x=0$ і $x=-1$. Тобто, графік перетинає вісь O_x в цих двох точках (одну з них ми вже знайшли раніше).

Скориставшись методом інтервалів, знайдемо знак функції на інтервалах між коренями і точками разриву. Таких проміжків буде п'ять: $(-\infty;-1)$; $(-1;0)$; $(0;1)$; $(1;2)$; $(2;+\infty)$.

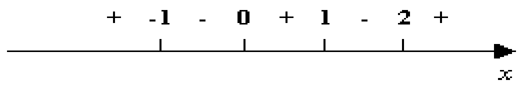

Рис.1. Проміжки знакосталості функції

(+ інтервали, на яких функція додатня, і - де вона від'ємна).

6). Знайдемо похідну:

$$f'(x)=\frac{-4x^2+4x+2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Для знаходження інтервалів зростання розв'яжемо нерівність $f'(x)>0$, $-4x^2+4x+2>0$ (при $x\neq 1, x\neq 2$), оскільки знаменник приймає додатні значення. Розв'язком даної квадратної нерівності буде проміжок $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; але точка $x=1$, не входить в $D(f)$, належить цьому проміжку. Отже самим, проміжків зростання функції $f(x)$ два: це $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ і $\left(1;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Для знаходження проміжків спадання потрібно розв'язати нерівність $\left(1;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, або $-4x^2+4x+2<0$ (при $x\neq 1, x\neq 2$). Розв'язком даної квадратної нерівності буде об'єднання двох проміжків $\left(-\infty;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$; точка $x=2$ ділить другий із них на дві частини. Тим самим, функція $f(x)$ спадає на трьох проміжках: $\left(-\infty;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$ і $(2;+\infty)$.

В точці $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ функція із спадної змінюється на зростаючу. При цьому $f(x)$ неперервна в точці x_1, як будь-яка елементарна функція в будь-яка точці області визначення. Отже x_1 -- точка локального мінімуму. Значення функції в цій точці мінімуму дорівнює

$$f_{\min} = f(x_1)=\frac{3-2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-7\approx -0.07$$

В точці $x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ функція із зростаючої змінюється на спадну. При цьому функція $f(x)$ неперервна в точці $x_2\in D(f)$. Отже - точка локального максимуму. Значення функції в точці максимуму дорівнює

$$f_{\max} = f(x_2)=\frac{3+2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}=-4\sqrt{3}-7\approx -13.9$$

Тепер ми можемо записати область значення функції:

$$\varepsilon(f)=(-\infty;f_{\min}]\cup[f_{\min};+\infty)\approx(-\infty;-13.9]\cup[-0.07;+\infty)$$

7). Знайдемо другу похідну:

$$f''(x)=4\frac{2x^3-3x^2+x+5}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

Для знаходження проміжків випуклості потрібно розв'язати нерівність $f''(x)>0$. При дослідженні, отримаємо, що $f''(x)$ міняє знак при переході через три точки: x_0, 1 і 2. Із цих трьох точок функція $f(x)$ неперервна лише в точці x_0, отже це єдина точка перегину. Методом інтервалів легко знаходимо, що на проміжках $(-\infty; x_0)$ і $(1;2)$ функція ввігнута, а на проміжках $(x_0;1)$ і $(2;+\infty)$ -- випукла.

8). Враховуючи попередні пункти дослідження, можемо побудувати графік функції.

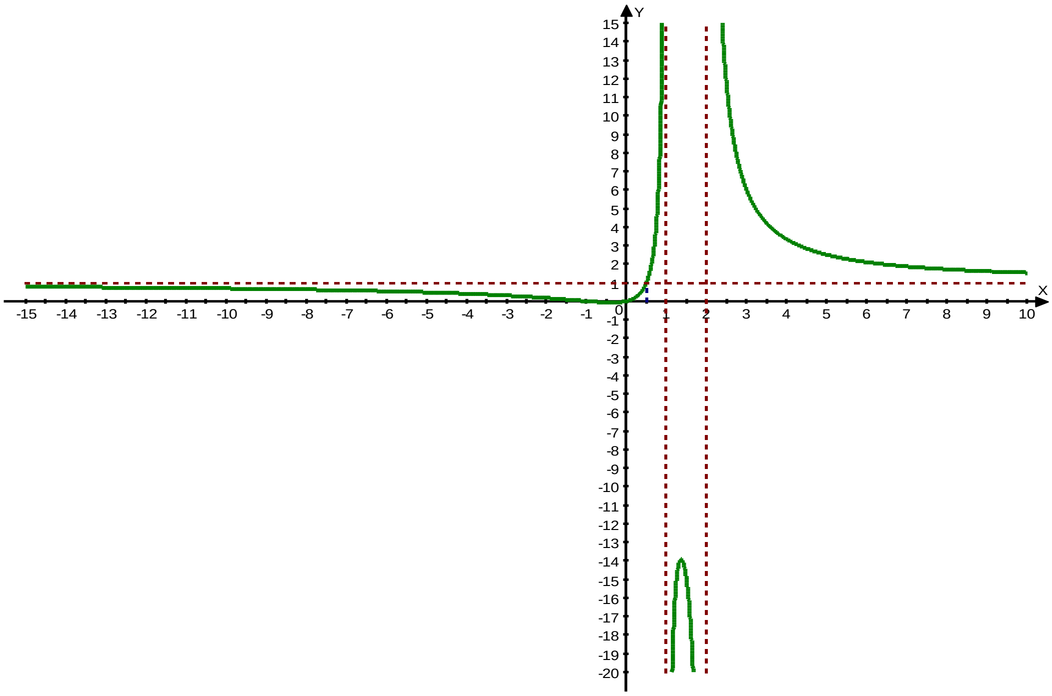

Рис.2.

Для повного дослідження доцільно знайти ту точку, де графік перетинається з горизонтальною асимптотою $y=1$. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x)=1$, тобто $\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}=1$. Його розв'язком буде $x=\dfrac{1}{2}$. Відмітимо цю точку на осі O_x.

II. Спосіб

В AG вибираємо "Добавить график" і в полі, справа від "Y(x)=" записуємо праву частину нашої функції (згідно синтаксису AG).

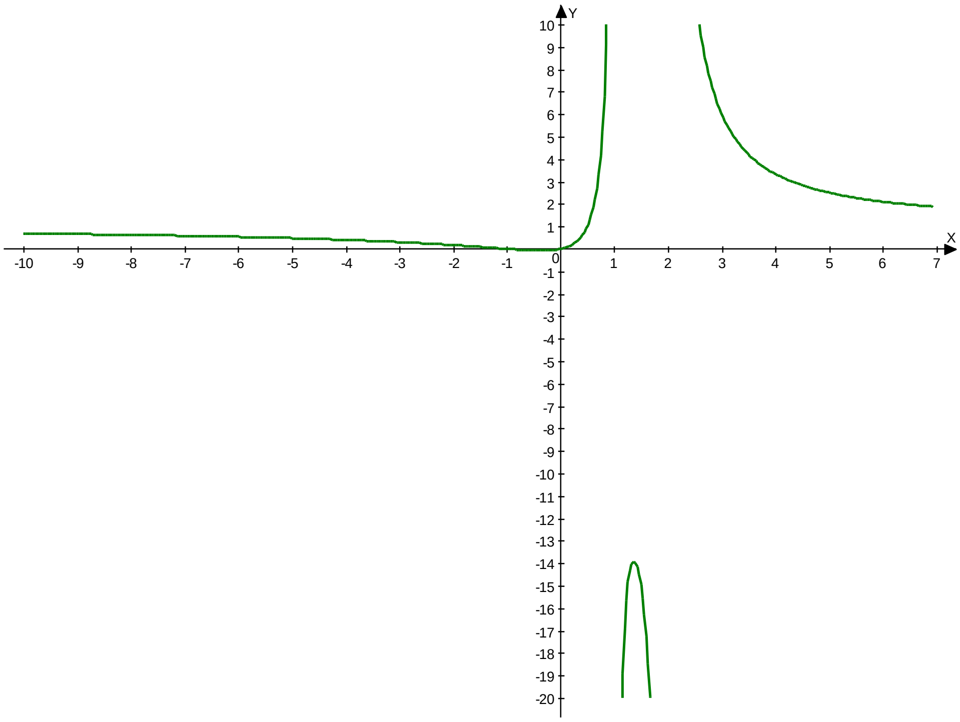

Рис.3

В результаті маємо графік даної функції (рис.3)

1. Розглянувши побудований графік функції та звернувши увагу на її знаменник можемо визначити, що $D(f)=R\setminus\{1;2\}=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$

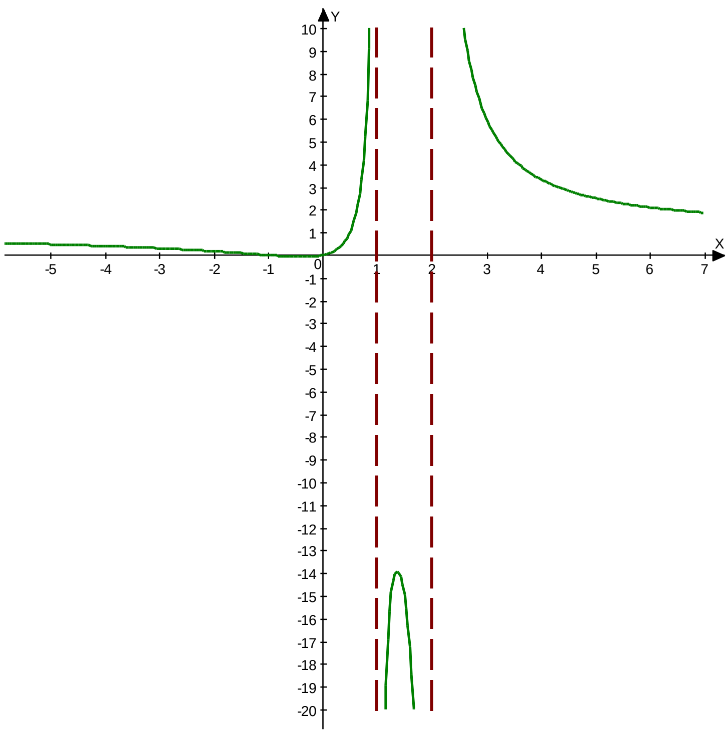

Рис.4

Для більшої наочності можна побудувати X=1, X=2 (рис.4).

2. З побудованого графіка функції робимо висновок що функція ні парна ні непарна і не періодична.

3. З побудованого графіка функції робимо висновок що область визначення цієї функції має дві граничні точки:x=1 і x=2.

4. Щодо похилих та горизонтальних асимптот потрібно провести аналітичне дослідження (як вказано в 1 способі)

5-6. Точки перетину графіка з осями та екстремуми знаходимо слідуючим чином "Вычисления/Исследование функции/" в параметрах обов’язково вказуємо "Использовать производную" (рис.5). Отже тепер ми знаємо кількість точок перетину та можемо вказати проміжки зростання та спадання функції.

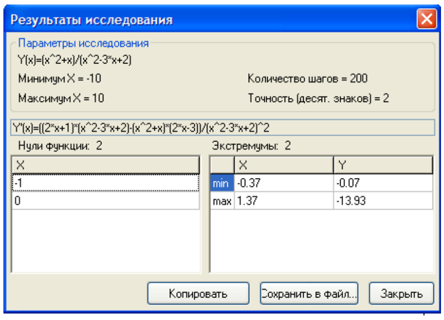

Рис. 5

Так само, як і в 1 способі $\varepsilon(f)$ остаточно ми можемо визначити тільки на цьому кроці.

$$\varepsilon(f) = (-\infty; f_{\min}] \cup [f_{\min}; +\infty) \approx (-\infty; -13.93] \cup [-0.07; +\infty)$$

7. Проміжки, на яких функція випукла і опукла теж можемо знайти виходячи з побудованого графіка функції та проведених вище (в 2 способі) досліджень, навіть не використовуючи другу похідну.

Висновки. Таким чином, використання засобів інформаційних технологій при формуванні процедурних компетентностей є перспективним напрямком подальших науково-педагогічних досліджень. Використання розглянутих програм дає змогу вчителеві значно інтенсифікувати його спілкування з учнями та учнів між собою, приділити більше уваги постановці задач, побудові їхніх математичних моделей, розробці і дослідженню методів розв’язування задач, дослідженню розв’язків, логічному аналізу умов задач, пошуку нестандартних підходів до розв’язування задач, виявленню закономірностей, яким підкоряються досліджувані процеси і явища, перекласти на комп’ютер технічні операції.

Список літератури

1. Жалдак М.И. Система подготовки учителей к использованию информационной технологии в учебном процессе: Дис. в форме науч. доклада… докт. пед. наук: 13.00.02 / АПН СССР. НИИ содержания и методов обучения. – М., 1989. – 48 с.

2. Жалдак М.И., Горошко Ю.В., Винниченко Е.Ф. Математика с компьютером: Пособие для учителей. К.: РУНЦ „ДИНИТ”, 2004. – 251 с.

3. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997.-303 с.

4. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: Дис…докт. пед. наук: 13.00.02 / Вінницький державний технічний ун-т. – Вінниця, 1998. – 396 с.

5. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики // Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

6. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 34–39.

7. Пометун О.І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку сучасної освіти // Рідна школа. – 2005. – № 1. – С. 65–69.

8. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 – теорія і методика навчання інформатики / Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди. – Харків, 2005. – 526 с.

9. Співаковський О.В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики вчителів математики з використанням інформаційних технологій: Дис…докт. пед. наук: 13.00.02 / О.В.Співаковський; НПУ ім. М.П.Драгоманова. – К., 2004. – 534 с.