УДК 511.1:371

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХНІХ СИСТЕМ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Ірина Волошинова

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація: *у статті розглянуто методичні особливості розв'язування рівнянь у цілих числах у шкільному курсі математики, у тому числі розглянуто приклади розв'язування лінійних діофантових рівнянь та їхніх систем; проілюстровано різні способи розв'язування лінійних діофантових рівнянь; розглянуто задачі шкільного курсу математики, що приводять до розв'язання у цілих числах невизначених рівнянь першого степеня з двома невідомими; показано на прикладах розв'язування нелінійних рівнянь у цілих (натуральних) числах; проілюстровано прикладами основні способи розв'язування нелінійних діофантових рівнянь; у статті відмічено, що розв'язування таких задач у старшій профільній школі сприяє поглибленню знань школярів з алгебри і теорії чисел, матеріал може бути використаний у дослідницькій роботі учнів та позакласній роботі.*

Ключові слова: *невизначене рівняння, лінійне діофантове рівняння, цілочислові розв'язки, системи діофантових рівнянь.*

Methodical peculiarities of study of diophantic equations and their systems in profile school

Irina Voloshinova

Scientific adviser: candidate of physical and mathematical sciences, associate professor Iziumchenko L.V.

Central Ukrainian State Pedagogical University named after V.Vynnychenko, Kropivnitsky, Ukraine

Summary: *the article deals with the methodical features of solving equations in integers in the school course of mathematics, including examples of solving linear Diophantine equations and their systems; various ways of solving linear Diophantine equations are illustrated; the problems of the school course of mathematics are considered, which lead to the solution of the integer numbers of uncertain equations of the first degree with two unknowns; shown on examples of solving nonlinear equations in integer (natural) numbers; illustrates examples of basic methods for solving nonlinear Diophantine equations; the article notes that the solving of such tasks in the senior profile school promotes the knowledge of the students on algebra and the theory of numbers, the*

material can be used in research work of students and extra-curricular work.

Keywords: *uncertain equation, linear Diophantine equation, integer solutions, systems of Diophantine equations.*

Постановка проблеми. Завдання шкільного курсу математики полягає в тому, щоб забезпечити в учнів свідоме оволодіння математичними знаннями, вміння застосовувати математику до розв'язування практичних задач і проблем. Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що навіть найпростіші теоретико-числові задачі сприяють активізації пізнавального інтересу учнів; використання базових знань теорії чисел спрощує розв'язання багатьох конкурсних та практичних задач, сприяє розвитку творчого мислення учнів у процесі вивчення математики; задачі практичного змісту часто мають виключно теоретико-числове звучання; теоретико-числова складова є невід'ємною частиною профільного вивчення математики у школі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Структуру та зміст профільного навчання математики, наступність у процесі навчання та професійну спрямованість навчання математики досліджували Бурда М.І., Бевз В.Г., Тарасенкова Н.А., Швець В.О., Хмара Т.М. та ін., формування творчої особистості учня, розвиток творчого мислення учнів у процесі навчання математики – Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Скафа О.І., Слєпкань З.І., Чашечникова О.С. та ін. Системний підхід в організації розв'язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Борисова В.О., Вишенський В.А., Вороний О.М., Ганюшкін О.Г., Добосевич М.С., Карташов М.В., Курченко О.О., Лейфура В.М., Мазорчук В.С., Михайловський В.І., Мітельман І.М., Нагорний В.Н., Некрашевич В.В., Перестюк М.О., Плахотник В.В., Працьовитий М.В., Рабець К.В., Радченко В.М., Федак І.В., Шунда Н.М., Ясінський В.А. та ін. Дослідження теоретико-числової складової у системі математичної освіти знаходимо у Ізюмченко Л.В., Панасенка О.Б., Плахотника В.В., Швеця В.О., Ясінського В.А., Ясінського В.В. та ін.

Мета: Проаналізувати конкурсні завдання теорії чисел, підібрати приклади задач, що приводять до розв’язання діофантових рівнянь, проілюструвати різні способи розв’язання діофантових рівнянь, висвітлити методичні аспекти розв’язування конкурсних теоретико-числових задач, пов’язаних з діофантовими рівняннями та їхніми системами.

Основна частина. Значну частину конкурсних теоретико-числових задач складають задачі, у яких потрібно знайти цілочислові розв’язки, це можуть бути невизначені рівняння, системи рівнянь, геометричні задачі чи задачі практичного змісту.

Жодний конкурс не проходить без лінійного діофантового рівняння виду $ax+by=c$, де a,b,c – цілі числа. Відомо [1], що це рівняння має розв’язки у цілих числах тоді і тільки тоді, права частина c ділиться на найбільший спільний дільник коефіцієнтів лівої частини, тобто НСД(a,b); якщо числа a,b – взаємно прості, то рівняння завжди має розв’язки у цілих числах. Відомим з курсу лінійної алгебри є факт: щоб знайти усі розв’язки неоднорідної невизначеної (сумісної) системи лінійних рівнянь, достатньо знайти усі розв’язки відповідної їй однорідної системи і додати їх до часткового розв’язку власне самої неоднорідної системи рівнянь. Очевидно, цей факт поширюється і на одне лінійне рівняння. Іншими словами, якщо відомий частковий розв’язок $(x_0;y_0)$ рівняння $ax+by=c$, достатньо знайти усі розв’язки однорідного рівняння $ax+by=0$; якщо НСД$(a,b)=1$, то це $\begin{cases} x=-bt, \\ y=at, \end{cases}$ $t\in Z$, і тоді кінцева відповідь виглядає $\begin{cases} x=x_0-bt, \\ y=y_0+at, \end{cases}$ $t\in Z$.

Задача 1. Розв’яжіть рівняння $11x+7y=2$ в цілих числах.

Розв’язання. Знайдемо спочатку який-небудь частковий розв’язок даного рівняння. Для цього обчислимо НСД (11; 7) за алгоритмом Евкліда: 11=7·1+4; 7=4·1+3; 4=3·1+1; 3=1·3. А тому маємо, що НСД(11; 7)=1; зобразимо цей НСД у вигляді 11u+7v:

$$1=4-3\cdot1=4-(7-4\cdot1)\cdot1=4\cdot2-7=(11-7\cdot1)\cdot2-7=11\cdot2+7\cdot(-3).$$

Тоді маємо: $2 = 2\cdot(-1\cdot 2+7\cdot(-3)) = 11\cdot 4+7\cdot(-6)$. Таким чином пара $x_0 = 4,\ y_0 = -6$ є частковим розв'язком даного рівняння. Отже, усі цілочислові розв'язки даного рівняння мають вигляд $x = 4-7t$, $y = -6+11t$, де $t\in Z$.

Зауважимо, що якщо коефіцієнти a або b рівняння $ax+by=c$ невеликі (як у нашій задачі), причому 7 – менший коефіцієнт (при невідомій y), тоді, надаючи невідомій x сім послідовних цілих значень, обов'язково натрапимо на ціле значення x_0, підставимо його у вихідне рівняння, отримаємо y_0.

Відповідь: $(4-7t;\ -6+11t)$, $t\in Z$.

Задача 2. Знайдіть усі натуральні *n*, для яких дріб $\frac{7n+1}{3}$ є скоротним.

Розв'язання. Дріб буде скоротним, якщо НСД чисельника і знаменника більший від 1. Оскільки дільники знаменника 3, простого числа, є 1 і 3, то НСД може бути рівним 3. Звідки $(7n+1)\,\vdots\,3$ або $7n+1=3t$, $t\in Z$. Маємо діофантове рівняння $3t-7n=1$. Надаючи n цілих послідовних (трьох) значень, обов'язково один раз знайдемо ціле значення t. Наприклад, при $n=2, t=5$. Усі розв'язки $t=5+7t$, $n=2+3t,\ t\in Z$. Оскільки за умовою $n\in N$, то $2+3t\geq 1 \Rightarrow t\in N_0$.

Відповідь: $n=2+3t,\ t\in N_0$.

Якщо *d*=НСД*(a,b)*≠1, то потрібно поділити обидві частини рівняння на *d* – отримаємо рівносильне початковому рівняння: $\frac{a}{d}\cdot x+\frac{b}{d}\cdot y=\frac{c}{d}$. Якщо c не ділиться на *d*, то ліва частина при цілих *x* і *y* є цілою, а права – дробовою, що неможливо, тобто рівняння цілочислових розв'язків не має.

Задача 3. Для транспортування зерна є мішки по 60 кг і 80 кг. Скільки потрібно тих і інших мішків для перевезення 220 кг зерна? Мішки повинні бути повністю заповнені.

Розв'язання. Нехай *x*; *y* – число мішків місткістю 60 та 80 кг, відповідно. За умовою задачі складемо рівняння 60*x*+80*y*=220. НСД(60; 80)=20; причому 220⋮20, рівняння має розв'язки в цілих числах. Скоротимо на 20: 3*x*+4*y*=11;

(1; 2) – один з розв’язків; усі розв’язки x=1–4t; y=2+3t; $t \in Z$. Оскільки значення невідомих – невід’ємні, то маємо єдину можливість: при t=0 (1; 2).

Відповідь: єдина можливість: 1 мішок по 60 кг та 2 мішки по 80 кг.

Геометрична інтерпретація розв’язків у цілих числах рівняння $ax+by=c$: розв’язкам у цілих числах відповідають ті точки прямої, обидві координати яких – цілі числа. Наведемо приклади задач, формулювання яких має геометричну складову.

Задача 4. Знайдіть цілі координати x та y такі, щоб вектори $\overline{(20;19;-2019)}$ і $\overline{(x;y;1)}$ були взаємно перпендикулярними.

Розв’язання. З умови ортогональності векторів маємо $20x+19y-2019=0$. А тоді $20x+19y=2019$ (де $x, y \in Z$) – діофантове рівняння. Оскільки $(20;19)=1$, воно має цілочислові розв’язки. Один з них очевидний, так як $20 \cdot 100 + 19 \cdot 1 = 2019$. Тоді усі цілочислові розв’язки $\begin{cases} x = 100 - 19t, \\ y = 1 + 20t, \end{cases} t \in Z.$

Відповідь: $\begin{cases} x = 100 - 19t, \\ y = 1 + 20t, \end{cases} t \in Z$.

Задача 5. Знайдіть всі цілі невід’ємні розв’язки рівняння $20x+19y=2019$ (Через які цілочислові вузли першої координатної чверті проходить пряма $20x+19y-2019=0$)?

Розв’язання. З попередньої задачі маємо $x=100-19t, \quad y=1+20t, t \in Z.$ Оскільки $x=100-19t>0, y=1+20t>0,$ то $t<\frac{100}{19}, t>-\frac{1}{20}$. Враховуючи умову цілочисельності, для t маємо лише шість варіантів: $t \in \{0;1;2;3;4;5\}$. А тоді у відповіді вказуємо вузли: $(100;1);(81;21);(62,41);(43;61);(24;81);(5;101)$.

Відповідь: $(100;1);(81;21);(62,41);(43;61);(24;81);(5;101)$.

Серед завдань зовнішнього незалежного оцінювання з математики можна зустріти задачі такого формулювання.

Задача 6. Запишіть загальну формулу чисел, що дають при діленні на 5 остачу 2, а при діленні на 7 – остачу 5.

Розв'язання. За умовою шукане число a можна представити у вигляді a=5m+2=7n+5, де $m, n \in Z$. Маємо діофантове рівняння

$$5m+2=7n+5, \text{ або } 5m-7n=3.$$

Частковим розв'язком цього рівняння є пара $m_0=2,\ n_0=1$, а тоді усі його цілочислові розв'язки мають вигляд $m=2+7t,\ n=1+5t$, де $t \in Z$. Звідки:

$$a=5m+2=5\cdot(2+7t)+2=35t+12, \text{ де } t \in Z .$$

Відповідь: $a=35+12t,\ t \in Z$.

Крім лінійних діофантових рівнянь зустрічаються рівняння чи задачі, які приводять до розв'язання нелінійних діофантових рівнянь. У літературі зустрічається опис способів розв'язання діофантових рівнянь: метод локалізації і перебору, графічний метод, метод розкладання на множники та метод спуску [2]. Розглянемо також використання теорії подільності до розв'язання діофантових рівнянь.

Задача 7. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння: $x!-2018=y^2$.

Розв'язання. Оскільки $x!=y^2+2018 \geq 2019$, то $x \geq 7$. Порівнюємо останні цифри: ліва частина $n_1=x!$ ділиться на 2 і на 5, а тому закінчується нулем, квадрат цілого числа закінчується цифрами 0; 1; 4; 5; 6; 9, а тоді права частина y^2+2018 не може закінчуватися нулем.

Відповідь: не існує розв'язків.

Задача 8. Доведіть, що рівняння $x^3-x=y^2+2019y-2018$ не має розв'язків у цілих числах.

Доведення. Ліва частина $x^3-x=x\cdot(x^2-1)=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$ є добутком трьох послідовних цілих чисел, а тому ділиться на 3!, покажемо, що права частина не ділиться на 3 при будь-якому цілому y:

$y \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 0^2+2019\cdot 0-2018 \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$ – не ділиться на 3;

$y \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 1^2+2019\cdot 1-2018 \equiv 2 \pmod 3$ – не ділиться на 3;

$y \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^2+2019\cdot 2-2018 \equiv 2024 \equiv 2 \pmod 3$ – не ділиться на 3.

Задача 9. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння $x^2-y^2=2019$.

Розв'язання. Запишемо рівняння $(x-y)(x+y)=2019$; маємо діофантове рівняння. 2019=3·673, число 673 – просте; числа $(x-y), (x+y)$ – однакової парності. Для натуральних значень змінних x, y отримаємо $x+y \in N$, тоді $x-y \in N$, звідки $x>y$; $x+y>x-y$, а тому є тільки дві можливості:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=2019,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=3,\\ x+y=673,\end{cases}\end{array}\right. \text{. Отримаємо } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1010,\\ y=1009,\end{cases}\\ \begin{cases}x=338,\\ y=335.\end{cases}\end{array}\right. .$$

Врахуємо симетрію відносно осей координат і початку координат, отримаємо усі цілочислові розв'язки: (±1010;±1009); (±1010;∓1009); (±338;±335); (±338;∓335).

Відповідь: (±1010;±1009); (±1010;∓1009); (±338;±335); (±338;∓335).

Наведемо приклад розв'язування системи лінійних діофантових рівнянь.

Задача 10. Розв'яжіть систему в цілих числах: $\begin{cases}12x-10y+7z=2\\ 4x-3y+2z=1\end{cases}$ [3].

Розв'язання. Виключимо невідому *x* із системи рівнянь, отримаємо рівняння, яке залежить від двох невідомих *y*; *z*. Розв'яжемо діофантове рівняння відносно *y*; *z* та підставимо отримані значення в *x*:

$$\begin{cases}12x-10y+7z=2\\ 4x-3y+2z=1 \quad \Big| \cdot(-3)\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\begin{cases}12x-10y+7z=2\\ -12x+9y-6z=-3\end{cases}\Rightarrow\\ \hline +: \qquad -y+z=-1\end{array} \begin{cases}y=z+1\\ x=\dfrac{3y-2z+1}{4}\end{cases}.$$

А тоді $x=\dfrac{3(z+1)-2z+1}{4}$, $x=\dfrac{z}{4}+1$. Оскільки *x* має бути цілим, то *z* має ділитися на 4: $z=4t$; $y=1+4t$; $x=1+t$, $t \in Z$.

Перевірка: $\begin{cases}12(1+t)-10(1+4t)+7\cdot 4t=2\\ 4(1+t)-3(1+4t)+2\cdot 4t=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12+\underline{12t}-10-\underline{40t}+\underline{28t}=2\\ 4+\underline{4t}-3-\underline{12t}+\underline{8t}=1\end{cases}.$

Відповідь: $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1+4t, t \in Z.\\ z=4t,\end{cases}$

Наведемо приклади завдань практичного змісту, що зводяться до лінійних діофантових рівнянь:

Приклад 1. Авто вантажністю 7 тонн треба повністю завантажити контейнерами, що мають масу 250 кг та 120 кг. Як це можна зробити? Укажіть, скільки контейнерів кожного виду треба взяти.

Вказівка: рівняння $250x+120y=7000$, звідки $25x+12y=700$; усі розв’язки $(28-12t;0+25t)$; $t\in Z$. Значення невідомих – невід’ємні, отримаємо три можливості: при t=0 (28;0); t=1 (16;25); t=2 (4;50).

Відповідь: є три можливості: або 28 контейнерів по 250 кг, або 16 контейнерів по 250 кг і 25 контейнерів по 120 кг, або 4 контейнери по 250 кг і 50 контейнерів по 120 кг.

Приклад 2. Є труби завдовжки 4,5 м і 2,5 м, треба прокласти трубопровід завдовжки 37 метрів, скільки і яких труб потрібно завезти?

Вказівка: рівняння $9x+5y=74$, усі розв’язки $(1-5t;13+9t)$; $t\in Z$, звідки: (1; 13) або (6; 4).

Відповідь: є дві можливості: або одна довга і 13 коротких труб, або 6 довгих і 4 коротких труби.

Приклад 3. Є банки ємністю 3 л і 5 л, треба відміряти рівно 1 л води. Як це можна зробити?

Вказівка: рівняння $3x+5y=1$, тобто є безліч можливостей, наприклад, (2;-1), (-3; 2); загальний розв’язок $(2-5t;-1+3t)$; $t\in Z$.

Відповідь: є безліч можливостей: (2;-1), (-3; 2) ….

Приклад 4. Олівець коштує 2,2 грн., а ручка – 3,5 грн., скільки цих канцтоварів можна закупити на 51 грн. так, щоб витратити усі кошти?

Вказівка: рівняння $22x+35y=510$, загальний розв’язок $(20-35t;2+22t)$; $t\in Z$, єдина можливість (20; 2).

Відповідь: єдина можливість – 20 олівців та 2 ручки**.**

Приклад 5. П’ять однакових ручок та шість однакових олівців коштують 49 гривні. Визначте ціну ручки та ціну олівця, якщо вони виражаються цілим числом гривень.

Вказівка: рівняння $5x+6y=49$, загальний розв’язок $(5-6t;4+5t)$; $t\in Z$, єдина можливість (5; 4).

Відповідь: ціна ручки 5 грн., олівця – 4 грн.

Приклад 6. Квитки у театр коштують 120 грн. і 150 грн. Скільки і яких квитків можна купити на 1050 грн.?

Відповідь: (5; 3) або (0; 7).

Приклад 7. У касира є купюри по 20 грн. і 50 грн., а треба дати решту 230 грн. Скільки і яких купюр він має дати покупцю?

Відповідь: (4; 3) або (9; 1).

Розв'язування таких задач у старшій профільній школі сприяє поглибленню знань школярів з алгебри і теорії чисел, матеріал може бути використаний у дослідницькій роботі учнів у Малій академії наук.

Висновки. Теоретико-числові задачі, у тому числі задачі на подільність, діофантові рівняння використовуються у процесі розв'язування різних типів задач. З давніх-давен і по сьогодні розділ математики «Теорія чисел» привертає увагу багатьох людей, які всю свою професійну діяльність присвятили вивченню основ математики, теорія чисел лежить в основі захисту інформації. У реальному житті зустрічаються безліч задач, які мають теоретико-числове звучання та потребують розв'язання.

Наведеними прикладами не обмежується застосування теорії чисел в шкільному курсі математики і вчитель зможе внести корективи у викладений матеріал в залежності від підготовки учнів, їх здібностей і інтересів. Розглянутий матеріал можна використати на факультативах чи позакласній роботі.

Список використаної літератури

1. Бородін О.І. Теорія чисел. Вид. 3-тє, переробл. і доп./О.І. Бородін – К.: Вища школа. 1970, – 275 с.
2. Вороний О.М. Вибрані задачі шкільної математики. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – 232 с.
3. Ізюмченко Л.В. Практикум з теорії чисел: Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2014. – 76 с.