УДК 37.091.26

КОНСТРУЮВАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З НАПЕРЕД ВИЗНАЧЕНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Бачинська Марина Миколаївна

Науковий керівник – доктор педагогічних наук, професор В.А.Кушнір

У статті розглядається конструювання ірраціональних рівнянь і многочленів з певними властивостями засобами математичного моделювання. Досліджуються особливості побудови математичних моделей конструювання ірраціональних рівнянь певних видів

Ключові слова: ірраціональні рівняння, многочлени, математика

CONSTRUCTION OF TEST PROBLEMS WITH AWARENESS DETERMINED PROPERTIES

Bachinskaya Marina Nikolaevna

Scientific supervisor - doctor of pedagogical sciences, professor VA Kushnir

The article deals with the construction of irrational equations and polynomials with certain properties by means of mathematical modeling. The peculiarities of constructing mathematical models of constructing irrational equations of certain types are studied

Key words: *irrational equations, polynomials, mathematics*

Постановка проблеми. Проблема створення тестових завдань з наперед визначеними властивостями на сьогодні є досить актуальною, що підтверджується недостатньою увагою до зворотних задач в школі, котрі є важливим аспектом математичної підготовки учнів. До таких проблем відноситься і конструювання ірраціональних нерівностей певного виду.

Метою статті є побудова математичних моделей, способів їх розв’язування й відповідних алгоритмів конструювання ірраціональних рівнянь і функцій певного виду.

Завдання статті: 1) дослідити особливості побудови математичних моделей конструювання ірраціональних рівнянь певних видів; 2) створення способів і відповідних алгоритмів розв’язування побудованих математичних моделей; 3) створення програмних продуктів для тиражування потрібної кількості різних варіантів прикладів.

Об’єктом статті є процес навчання математики.

Предметом статті виступає технологія конструювання ірраціональних рівнянь і функцій певних видів.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Розглянемо найбільш типові випадки конструювання ірраціональних рівнянь і нерівностей, зокрема рівнянь і нерівностей виду з наперед визначеними властивостями

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(<,\leq,>,\geq)mx+n\,. \tag{1}$$

Після піднесення до квадрату рівняння (1) одержуємо відповідне квадратне рівняння

$$(a-m^2)x^2+(b-2mn)x+(c-n^2)=0 \tag{2}$$

Наведемо типові випадки задачі (1), математичні моделі, алгоритми й програми їх розв'язування. Відповідне теоретичне обґрунтування моделей і алгоритмів наведене в [9].

Задача 1. Сконструювати рівняння (нерівність) (1) за умови, що відповідне квадратне рівняння (2) має два різні дійсні корені і вони обидва будуть коренями рівняння (1)

Математична модель 1 побудови ірраціональних рівнянь і нерівностей виду (1) за умови, що квадратне рівняння (2) має два різні дійсні корені і вони обидва будуть розв'язками рівняння (1).

$$\begin{cases} b=(m^2-a)(x_2+x_1)+2mn\,. \\ c=ax_1x_2-m^2x_1x_2+n^2 \\ mx_1+n\geq 0 \\ mx_2+n\geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Алгоритм 1.

1. Генеруємо випадковим чином два довільні не рівні між собою дійсні числа із певного відрізка, наприклад, із [-6, 6].
2. $\boldsymbol{x_1}$ присвоюємо значення меншого із них, $\boldsymbol{x_2}$ – значення більшого ($x_1=2, x_2=4$).

3. Генеруємо випадковим чином із цього ж проміжку значення ***m*** ($m=-3$)***.***

4. Генеруємо випадковим чином значення $\boldsymbol{i}>0$ із проміжку [1, 6] ($i=2$).

5. Обчислюємо значення ***n*** за формулою

$$n=\begin{cases}-x_1m+i, при\ m\ge 0\\ -x_2m+i, при\ m<0\end{cases}\quad (n=14).$$

6. Генеруємо випадковим чином значення $a,(a\ne m^2)\wedge(a\ne 0)$ із проміжку [-6, 6] ($a=-3$).

7. Обчислюємо ***b*** і ***c*** за формулами:

$$b=(m^2-a)(x_2+x_1)+2mn\ (b=-18),$$

$$c=ax_1x_2-m^2x_1x_2+n^2\ \ (c=108).$$

8. Рівняння чи нерівності (1) – (5) з наведеними вище властивостями побудовані $\sqrt{-2x^2-18x+108}=-3x+14$.

9. Кінець роботи алгоритму 1.

Програма 1.

$y := rand(-3..2) : z := rand(1..2) : i := 1 : j := 33 :$

while $i \le j$ **do**
$v1 := y() : v2 := y()$:**while** $(v1 - v2 \ge 0)$ **do** $v1 := y() : v2 := y()$:**end do**:
$x1 := v1 : x2 := v2 : m := y() : k := z() :$
if $m \ge 0$ **then** $n := -x1\cdot m + k$: **else** $n := -x2\cdot m + k$:**end if**:
$a1 := z()$: **while** $a1 = m^2$ **and** $a1 = 0$ **do** $a1 := z()$: **end do**:
$a := a1 : b := (m^2 - a)\cdot(x1 + x2) + 2\cdot m\cdot n : c := a\cdot x1\cdot x2 - m^2\cdot x1\cdot x2 + n^2 :$
$q := a\cdot b\cdot c\cdot m\cdot n\cdot(b^2 - 4\cdot a\cdot c)$: **if** $q \ne 0$ **then** $i := i + 1$:
$print\left(\sqrt{a\cdot x^2 + b\cdot x + c} = m\cdot x + n\right)$:
$print\left(Відповідь\quad solve\left(\sqrt{a\cdot x^2 + b\cdot x + c} = m\cdot x + n, x\right)\right)$
else $s := 1$ **end if**:
end do:

$\sqrt{x^2-13x+16}=-2x+4$	$\sqrt{2x^2+5x+7}=x+3$	$\sqrt{2x^2-x+3}=x+1$
$\sqrt{2x^2-30x+32}=-3x+5$	$\sqrt{2x^2-6x+1}=-2x+1$	$\sqrt{x^2-18x+33}=-3x+7$
$\sqrt{2x^2+10x+4}=2x+2$	$\sqrt{2x^2-6x+8}=-x+3$	$\sqrt{x^2-15x+15}=-2x+3$

Задача 2. Побудувати ірраціональне рівняння (1) при умові, що квадратне рівняння (2) має два дійсні різні розв'язки, а ірраціональне рівняння (1) тільки один.

Математична модель 2 *:побудови ірраціональних рівнянь і нерівностей виду (1) за умови, що квадратне рівняння (2) має два різні дійсні корені і тільки менший з них буде розв'язком рівняння (1).*

$$\begin{cases} b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn. \\ c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2 \\ mx_1 + n \geq 0 \\ mx_2 + n < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Алгоритм 2.

1. Генеруємо випадковим чином два довільні не рівні між собою дійсні числа із певного відрізка, наприклад, із [-6, 6].
2. x_1 присвоюємо значення меншого із них, x_2 – значення більшого ($x_1 = 2, x_2 = 3$).
3. Генеруємо випадковим чином значення $m \in [-6; -1]$ ($m = -3$).
4. Вибираємо значення ***n*** за формулою

$$-x_1m \leq n \leq -x_2m - 1, m \leq 0,\ 6 \leq n \leq 11, n = 6.$$

5. Генеруємо випадковим чином значення $a, (a \neq m^2) \wedge (a \neq 0)$ із проміжку [-6, 6] ($a = -2$).
6. Обчислюємо ***b*** і ***c*** за формулами:

$$b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn\ \ (b = 30),$$

$$c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2\ (c = -52).$$

7. Рівняння (чи нерівності) (1) з наведеними вище властивостями побудовані

$$\sqrt{-2x^2 + 30x - 52} = -3x + 6.$$

8. Кінець роботи алгоритму.

Програма 2.

$y := rand(-2..2) : z := rand(-3..-1) : i := 1 : j := 33 :$

```
while i ≤ j do v1 := y( ) : v2 := y( ) :while (v1 − v2 ≥ 0) do v1
    := y( ) : v2 := y( ) :end do: x1 := v1 : x2 := v2 : m := z( ) : z2
    := −x2·m − 1 : k := rand(−x1·m..z2) : n := k( ) : a1 := z( ) :
   while a1 = m^2 and a1 = 0 do a1 := z( ) : end do: a := a1 : b
    := (m^2 − a)·(x1 + x2) + 2·m·n : c := a·x1·x2 − m^2·x1·x2
    + n^2 : q := a·b·c·m·n·(b^2 − 4·a·c) :
 if q ≠ 0 then i := i + 1 : print( sqrt(a·x^2 + b·x + c) = m·x + n ) :
   print(Відповідь   solve( sqrt(a·x^2 + b·x + c) = m·x + n, {x})) :
   else  end if : end do:
```

$\sqrt{-2x^2+2x+4}=-x-1$	$\sqrt{-2x^2-x+4}=-3x+2$	$\sqrt{-2x^2+14x+36}=-3x-6$
$\sqrt{-x^2-x+1}=-2x-1$	$\sqrt{-2x^2+3x+3}=-3x+5$	$\sqrt{-x^2+2x+3}=-x-1$
$\sqrt{-2x^2-5x-2}=-x-2$	$\sqrt{-x^2+2x+4}=-3x-2$	$\sqrt{-3x^2+6x+4}=-2x+2$

Задача 3. Сконструювати ірраціональне рівняння виду (1) при умові, що рівняння (2) має два різні дійсні корені і жоден з них не буде коренем рівняння (1).

Математична модель 3 *побудови ірраціональних рівнянь і нерівностей виду (1) за умови, що квадратне рівняння (2) має два різні дійсні корені і вони обидва не будуть розв'язками рівняння (1).*

$$\begin{cases} b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn. \\ c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2 \\ mx_1 + n < 0 \\ mx_2 + n < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Алгоритм 3.

1. Генеруємо випадковим чином два довільні не рівні між собою дійсні числа із певного відрізка, наприклад, із [-6, 6] .
2. x_1 присвоюємо значення меншого із них, x_2 – значення більшого ($x_1 = 2, x_2 = 3$).
3. Генеруємо випадковим чином значення $m \in [-6; 6]$ **(**$m = -3$**).**
4. Генеруємо випадковим чином значення $i > 0$ із проміжку [1, 6] ($i = 2$).
5. Обчислюємо значення ***n*** за формулою $n = 4$

$$n = \begin{cases} -x_2 m - i, \text{при } m \ge 0 \\ -x_1 m - i, \text{при } m < 0 \end{cases} ().$$

6. Генеруємо випадковим чином значення $a, (a \ne m^2) \wedge (a \ne 0)$ із проміжку [-6, 6] ($a = -2$).
7. Обчислюємо ***b*** і ***c*** за формулами:

$$b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn \; (b = 42),$$

$$c = ax_1 x_2 - m^2 x_1 x_2 + n^2 \; (c = -72).$$

8. Рівняння (чи нерівності) (1) з наведеними вище властивостями побудовані $\sqrt{-2x^2 + 42x - 72} = -3x + 4$.
9. Кінець роботи алгоритму.

Програма 3.

$y := rand(-2..2) : z := rand(1..2) : i := 1 : j := 33 :$
while $i \le j$ **do** $v1 := y() : v2 := y()$:**while** $(v1 - v2 \ge 0)$ **do** $v1 := y() : v2 := y()$:**end do**: $x1 := v1 : x2 := v2 : m := y() : k := z()$: **if** $m \ge 0$ **then** $n := -x2 \cdot m - k$: **else** $n := -x1 \cdot m - k$:**end if**: $a1 := z()$: **while** $a1 = m^2$ **and** $a1 = 0$ **do** $a1 := z()$:
end do: $a := a1 : b := (m^2 - a) \cdot (x1 + x2) + 2 \cdot m \cdot n : c := a \cdot x1 \cdot x2 - m^2 \cdot x1 \cdot x2 + n^2 : q := a \cdot b \cdot c \cdot m \cdot n \cdot (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)$: **if** $q \ne 0$ **then** $i := i + 1 : print\left(\sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} = m \cdot x + n\right)$:
else end if: **end do**:

$\sqrt{x^2 - 10x + 1} = 2x - 1$	$\sqrt{x^2 + 17x + 31} = -2x - 5$	$\sqrt{2x^2 + 9x + 14} = -x - 4$
$\sqrt{2x^2 + 5x + 7} = -x - 3$	$\sqrt{2x^2 - 22x + 40} = 2x - 6$	$\sqrt{2x^2 - 8x + 9} = x - 3$
$\sqrt{x^2 + 21x + 42} = -2x - 6$	$\sqrt{x^2 - 15x + 30} = 2x - 6$	$\sqrt{x^2 + 10x + 1} = -2x - 1$

2. Побудова многочленів четвертого порядку, котрі мають екстремуми.

Задача 4. Побудувати многочлен четвертого порядку, котрий має три екстремуми.

Математична модель 4. Як відомо, точки екстремумів многочленів четвертого порядку знаходяться із рівняння

$$P_4'(x) = 0.$$

Тоді математичною моделлю може бути

$$P_4'(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0, \tag{6}$$

де x_1, x_2, x_3 – довільні різні дійсні числа. Сам многочлен $P_4(x)$ матиме вигляд

$$P_4(x) = 12\int (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)dx + c, \tag{7}$$

де ***c*** – довільна стала. Множник 12 в (7) забезпечує цілі коефіцієнти шуканого многочлена $P_4(x)$(хоча це на розсуд вчителя).

Алгоритм 4.

1. Генеруємо випадкові числа x_1, x_2, x_3, c із проміжку [-6; 6]. Причому $x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3$.
2. Перевіряємо щоб жодне із генерованих чисел не було рівне нулю. Якщо $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot c = 0$, то йти до п.1. Наприклад, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ c = 4$.
3. Будуємо
$$P_4'(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$
4. Знаходимо
$$P_4(x) = 12\int (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)dx + 5 = 3x^4 - 24x^3 + 66x^2 - 72x + 5.$$
5. Якщо потрібно сконструювати 33 многочленів $P_4(x)$, то йти до п.1.
6. Кінець алгоритму 4.

Програма 4.

```
y := rand(-3..2) : i := 1 : j := 33 : d := rand(-10..10) :

while i ≤ j do x1 := y( ) : x2 := y( ) : x3 := y( ) : p := d( ) :
    while x1 = x2 or x1 = x3 or x1 = x3  do x1 := y( ) : x2 := y( ) : x3
     := y( ) :end do  : i := i + 1 : print(f(x) = int(expand((x - x1)
    ·(x - x2)·(x - x3)), x) + p) : end do:
```

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 + 8$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 - 5$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 6$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 2$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6$

Задача 5. Сконструювати $P_4(x)$ такий, щоб екстремум був тільки один.

Модель 5.1.

$$P'_4(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2) = 0.$$

Стаціонарних точок буде дві: x_1, x_2, а екстремум тільки один. Для стаціонарної точки x_1 не виконується достатня умова існування екстремуму, хоча необхідна виконується. Тоді шуканим многочленом може бути

$$P_4(x) = 12 \int (x - x_1)^2 (x - x_2) dx + c.$$

Алгоритм 5.1.

1. Генеруємо три числа x_1, x_2, c із проміжку [–6; 6]. Причому $x_1 \neq x_2$.
2. Якщо $x_1 \cdot x_2 \cdot c = 0$ йти до п.1. Наприклад, $x_1 = 1, x_2 = 2, c = 5$.
3. Знаходимо

$$P_4(x) = 12 \int (x - x_1)^2 (x - x_2) dx + c =$$

$$= 12 \int (x - 1)^2 (x - 2) dx = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 5.$$

4. Якщо потрібно сконструювати 33 многочлена $P_4(x)$, то йти до п.1.
5. Кінець алгоритму 5.1.

Програма 5.1.

```
y := rand(-2..2) : i := 1 : j := 33 : d := rand(-10..10) :

while i ≤ j do x1 := y() : x2 := y() : p := d() : while x1 = x2
    do x1 := y() : x2 := y() :end do : i := i + 1 : print(f(x)
    = int(expand((x - x1)^2·(x - x2)), x) + p) : end do:
```

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 2$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x - 4$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 6$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 + 4x + 1$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x - 9$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 9$

Математична модель 5.2.

Рівняння $P_4'(x)=0$ має один дійсний корінь і два комплексно-спряжені корені. Тоді $x_1=a+bi, x_2=a-bi$, де $a,b\in R, i-\textit{уявна одиниця}$, а

$$P_4'(x)=(x-a-bi)(x-a+bi)(x-x_3)=0\,.$$

Сам многочлен

$$P_4(x)=12\int(x-a-bi)(x-a+bi)(x-x_3)dx+c=$$

$$=12\int[(x-a)^2+b^2](x-x_3)dx+c\,.$$

Алгоритм 5.2.

1. Генеруємо випадкові цілі числа $a,b,x_3,c\in[-6,6]$.
2. Якщо виконується умова $a\cdot b\cdot x_3\cdot c=0$, то йти до п.1. Наприклад, $a=2, b=3, x_3=1, c=5$.
3. Знаходимо

$$P_4(x)=12\int[(x-a)^2+b^2](x-x_3)dx+c=$$

$$=12\int[(x-2)^2+3^2](x-1)dx+5=$$

$$=3x^4-20x^3+103x^2-156x+5\,.$$

4. Якщо потрібно 33 приклади, то йти до п.1.
5. Кінець роботи алгоритму 5.2.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Відповідну програму легко скласти подібно попереднім програмам, що користувач може зробити самостійно.

Список використаної літератури

1. Гончаренко С.У. (2008). Фундаментальність освіти як дидактичний принцип. Шлях освіти, 1 (47), 2 – 6.
2. Кушнір В.А. Дослідницька діяльність у фундаментальній професійній підготовці майбутніх учителів. Наукові записки, Педагогічні науки, Кіровоградський РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 150, 23-28.
3. Кушнір В.А. (2014). Конструювання навчальних завдань з математики: математичні моделі, алгоритми, програми. Інноваційні технології в освіті, 18, 030-041.

4. Кушнір В.А. (2014). Проблеми поєднання фундаментального і інноваційного при вивченні математики у вищих навчальних закладах. Витоки педагогічної майстерності: Зб. наук. праць, Полт. педаг. універ. ім. В.Г.Короленка, 20, 161 – 172.
5. Кушнір В.А. (2015). Тенденції та чинники розвитку математичної освіти та їх відображення в змісті підручників. Проблеми сучасного підручника, зб. наук. праць. К.: Педагогічна думка, 15, 317 – 327.
6. Семеріков С.О. (2009). Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: Монографія. Кривий Ріг: Мінерал, К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 284–339.
7. Bernardin L., Chin P., DeMarco P., Geddes R., Hare D., Heal K, ... Workortter S.M. (2011).

   Maple Programming Guide. Canada, Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc.