УДК 531/534 (075.8)

ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ЗАГАЛЬНИХ УМОВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ СТРИЖНІВ

Шилко Олексій

Науковий керівник: канд. тех. наук, доцент Ткачук А.І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розглянуті особливості вивчення загальних умов розв'язування задач технічної механіки на знаходження геометричних характеристик поперечних перерізів стрижнів шляхом використання алгоритмізації послідовності аналітичного розв'язку. Даний підхід дає можливість майбутнім вчителям технологічної освіти при вивченні цієї теми технічної механіки більш повноцінно засвоювати матеріал та виробити ефективну систему знань, умінь і навичок, необхідних при вивченні наступних розділів: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин.

Ключові слова: технічна механіка, геометричні характеристики поперечних перерізів стрижнів, алгоритм розв'язку задач.

Features of the study of general conditions for solving tasks for finding geometrical characteristics of cross-section of rods

O. Shylko

Scientific supervisor: Candidate of Technical Sciences, Associate Professor Tkachuk A.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

In the article the features of the study of general conditions for solving the problems of technical mechanics on the determination of the geometric characteristics of the cross sections of the rods are considered by means of the algorithmization of the sequence of the analytical solution. This approach makes it possible for future teachers of technological education to study this topic of technical mechanics more fully to master the material and develop an effective system of knowledge, skills and skills necessary for the study of the following sections: resistance of materials, theory of mechanisms and machines, machine parts.

Key words: *technical mechanics, geometric characteristics of cross-section of rods, algorithm for solving.*

Постановка проблеми. Аналіз системи професійної підготовки вчителів технологічної освіти у вищих навчальних закладах засвідчив, що рівень технічної підготовки майбутніх учителів є недостатнім для кваліфікованого виконання своїх обов'язків у сучасних умовах, які позначені переорієнтацією трудового навчання на проектно-технологічну діяльність учнів [1]. З огляду на це, актуальним є питання розробки наукових засад технічної підготовки майбутніх вчителів технологічної освіти, що потребує теоретичного обґрунтування та експериментальної перевірки ефективності структурних змін у навчальних програмах і посібниках з технічних навчальних дисциплін.

Аналіз досліджень і публікацій. Розв'язанню практичних проблем реформування змісту технологічної освіти та розробці теоретико-методичних засад підготовки вчителів присвячені дослідження Р. Гуревича, В. Гусєва, О. Коваленко, О. Коберника, В. Мадзігона, Г. Кондратюка, Г. Левченка, В. Стешенка, В. Сидоренка, Г. Терещука та інших. Одним із основних шляхів реформування освіти є запровадження у навчальний процес сучасних педагогічних технологій та науково-методичних досягнень. Пріоритетними в освіті є нове ставлення до знань та інтелекту підростаючого покоління [2].

Метою статті є обговорення та висвітлення нових підходів при вивченні теми «Геометричні характеристики поперечних перерізів стрижнів» за рахунок більш ефективного компонування та подачі лекційного матеріалу.

Методи дослідження: вивчення, порівняльний аналіз, узагальнення, систематизація науково-методичної та науково-практичної літератури з теми дослідження; системний і проблемно-пошуковий методи для обґрунтування шляхів удосконалення процесу вивчення геометричних характеристик поперечних перерізів стрижнів.

Навчальним планом на вивчення розділу «Технічна механіка» передбачено 120 годин: 36 годин лекцій, 16 годин практичних та 60 годин – на самостійне опрацювання матеріалу. Підвищення ефективності підготовки майбутнього фахівця, на наш погляд, полягає в пошуку шляхів оптимального використання різних засобів, методів та форм засвоєння навчального матеріалу. У цій роботі показано ефективний метод поліпшення рівня засвоєння матеріалу через алгоритмізацію послідовності аналітичного розв’язування задач на прикладі вивчення однієї з тем дисципліни – «Геометричні характеристики поперечних перерізів стрижнів».

Так, при вивченні загальних умов розв’язування задач на знаходження геометричних характеристик поперечних перерізів стрижнів, нами запропонована наступна послідовність визначення положення головних центральних осей інерції та значень головних центральних моментів інерції площі складного поперечного перерізу, що складається з простих частин:

1. Вибираємо для перерізу довільну систему прямокутних координат. Розбиваємо фігуру на прості частини та визначаємо за формулами $y_C = \dfrac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + ... + F_n \cdot y_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n}$, $z_C = \dfrac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + ... + F_n \cdot z_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n}$ положення її центра тяжіння.
2. Проводимо початкову систему центральних осей z та y так, щоб можна було найпростіше визначити моменти інерції частин фігури відносно цих осей. Для цього знаходимо моменти інерції частин фігури відносно їхніх власних центральних осей, проведених паралельно осям z, y, та користуємося формулами переходу до паралельних осей $J_{z_1} = J_z + a^2 \cdot F;\ J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot F;\ J_{z_1 y_1} = J_{zy} + a \cdot b \cdot F$. У такий спосіб знаходимо значення J_z, J_y, J_{zy}.
3. Визначаємо кут нахилу головних центральних осей за формулою $\alpha_0 = \dfrac{1}{2} \cdot arctg\left(\dfrac{2 \cdot J_{zy}}{J_y - J_z}\right)$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \alpha_0 \le \dfrac{\pi}{4}$, причому вісь, проведену під кутом α_0 (додатним чи від’ємним), позначаємо літерою u, а перпендикулярну до неї — літерою υ.
4. За формулами $J_u = \dfrac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y \pm \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right)$, $J_\upsilon = \dfrac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y \mp \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right)$, визначаємо головні моменти інерції J_u і J_υ, причому верхні знаки беремо при $J_z > J_y$, а нижні — при $J_z < J_y$.

Як приклад застосування алгоритму для аналітичного розв'язку задачі на знаходження геометричних характеристик поперечних перерізів стрижнів, розглянемо наступне: для перерізу, зображеного на рис. 1, ***а***, визначити положення головних центральних осей інерції u, υ, головні центральні моменти інерції J_u, J_υ та головні центральні радіуси інерції i_u, i_υ. Розміри фігури вказані на рисунку.

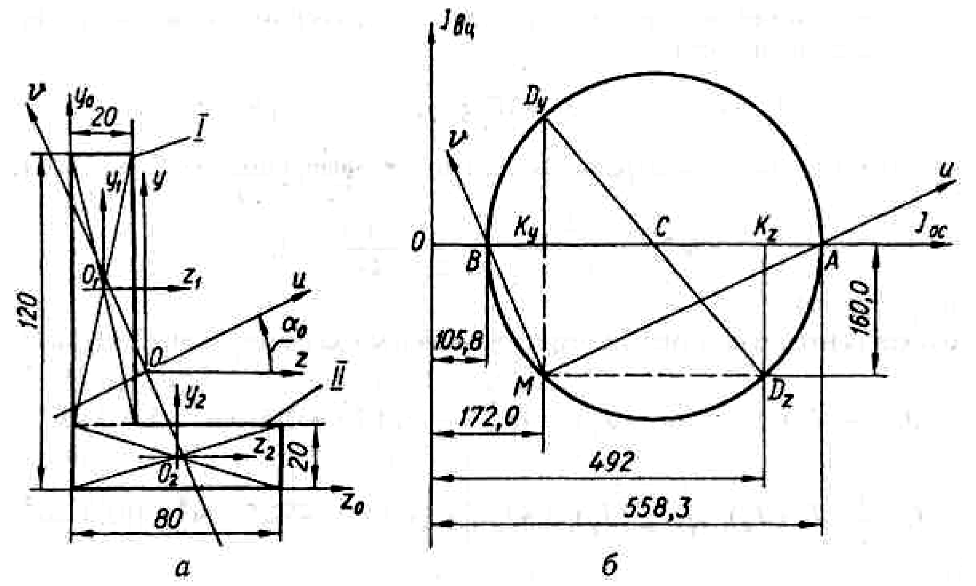

Рис. 1. Переріз стрижня

Дано:

$h = 120$ *мм*,

$l = 80$ *мм*,

$d = 20$ *мм*

u, υ – ?

J_u, J_υ – ?

i_u, i_υ – ?

Розв'язання:

1. Проводимо систему прямокутних координатних осей $z_0 y_0$ вздовж сторін l і h відповідно. Розбиваємо складний поперечний переріз на дві прості частини — прямокутники ***I*** і ***II***, та визначаємо для кожної з частин координати центра тяжіння та площу. Так, для першої частини (***I***) з центром ваги $O_1(z_1, y_1)$ матимемо: $z_1 = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ (*мм*),

$$y_1 = d + \frac{1}{2} \cdot (h - d) = 20 + \frac{1}{2} \cdot (120 - 20) = 70 \ (мм),$$

$$F_1 = d \cdot (h - d) = 20 \cdot (120 - 20) = 2000 \ (мм^2).$$

Для другої частини (***II***) з центром ваги $O_2(z_2, y_2)$ матимемо:

$$z_2 = \frac{l}{2} = \frac{80}{2} = 40 \ (мм), \ y_2 = \frac{d}{2} = \frac{20}{2} = 10 \ (мм), \ F_2 = l \cdot d = 80 \cdot 20 = 1600 \ (мм^2).$$

Тоді положення центра тяжіння складного перерізу буде

$$z_C = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2}{F_1 + F_2} = \frac{2000 \cdot 10 + 1600 \cdot 40}{2000 + 1600} = \frac{84000}{3600} \approx 23{,}3\ (мм);$$

$$y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{2000 \cdot 70 + 1600 \cdot 10}{2000 + 1600} = \frac{156000}{3600} \approx 43{,}3\ (мм).$$

Результати обчислень зводимо в табл. 1.

Таблиця 1

Результати обчислень

Номер частини фігури	Площа частини $F_i, мм^2$	Координати центра тяжіння частини в системі $z_0 y_0$, мм		$F_i \cdot z_i$	$F_i \cdot y_i$	$z_C, y_C, мм$
		z_i	y_i	$мм^3$		
I	2000	10	70	20000	140000	—
II	1600	40	10	64000	16000	—
Для всієї фігури	3600	–	–	84000	156000	$z_C = \frac{84000}{3600} \approx 23{,}3$ $y_C = \frac{156000}{3600} \approx 43{,}3$

2. Через точку $O(z_C, y_C)$ проводимо початкову систему центральних осей z, y паралельно сторонам кутника.

Для визначення моментів інерції відносно цих осей знову розбиваємо фігуру на прості частини – прямокутники ***I*** і ***II*** – та проводимо через їхні центри тяжіння власні центральні осі $z_1 O_1 y_1$ та $z_2 O_2 y_2$, паралельно сторонам.

Моменти інерції кожного прямокутника відносно власних центральних осей легко визначити за відповідними формулами:

$$J_{z_1}^{I} = \frac{d \cdot (h-d)^3}{12} = \frac{20 \cdot (120-20)^3}{12} = \frac{20000000}{12} \approx 1666667 \quad (мм^4);$$

$$J_{y_1}^{I} = \frac{(h-d) \cdot d^3}{12} = \frac{(120-20) \cdot 20^3}{12} = \frac{800000}{12} \approx 66667 \ (мм^4);$$

$$J_{z_2}^{II} = \frac{l \cdot d^3}{12} = \frac{80 \cdot 20^3}{12} = \frac{640000}{12} \approx 53333 \ (мм^4);$$

$$J_{y_2}^{II} = \frac{d \cdot l^3}{12} = \frac{20 \cdot 80^3}{12} = \frac{10240000}{12} = \frac{256}{3} \approx 853333 \ (мм^4).$$

Координати центра тяжіння ***O*** всього кутника відносно власних центральних осей z_1, y_1 першого прямокутника будуть:

$$b_1 = z_1 - z_C = 10 - 23{,}3 = -13{,}3 \ (мм); \ a_1 = y_1 - y_C = 70 - 43{,}3 = 26{,}7 \ (мм).$$

Координати центра тяжіння ***O*** всього кутника відносно власних центральних осей z_2, y_2 другого прямокутника будуть:

$$b_2 = z_2 - z_C = 40 - 23{,}3 = 16{,}7 \ (мм); \ a_2 = y_2 - y_C = 10 - 43{,}3 = -33{,}3 \ (мм).$$

Моменти інерції кожної простої фігури відносно центральних осей z, y знаходимо за формулами переходу до паралельних осей:

$$J_z^{I} = J_{z_1}^{I} + a_1^2 \cdot F_1 = 1666667 + 26{,}7^2 \cdot 2000 \approx 3092447 \ (мм^4);$$

$$J_y^{I} = J_{y_1}^{I} + b_1^2 \cdot F_1 = 66667 + (-13{,}3)^2 \cdot 2000 \approx 420447 \ (мм^4);$$

$$J_{zy}^{I} = J_{z_1 y_1}^{I} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 = 0 + 26{,}7 \cdot (-13{,}3) 2000 \approx -710220 \ (мм^4);$$

$$J_z^{II} = J_{z_2}^{II} + a_2^2 \cdot F_2 = 53333 + (-33{,}3)^2 \cdot 1600 \approx 1827557 \ (мм^4);$$

$$J_y^{II} = J_{y_2}^{II} + b_2^2 \cdot F_2 = 853333 + 16{,}7^2 \cdot 1600 \approx 1299557 \ (мм^4);$$

$$J_{zy}^{II} = J_{z_2 y_2}^{II} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 = 0 + (-33{,}3) 16{,}7 \cdot 1600 \approx -889776 \ (мм^4).$$

Результати обчислень зводимо в табл. 2 і табл. 3.

Таблиця 2

№	F_i, $мм^2$	a_i, $мм$	b_i, $мм$	$a_i^2 \cdot F_i$, $мм^4$	$b_i^2 \cdot F$, $мм^4$	$a_i \cdot b_i \cdot F_i$, $мм^4$
I	2000	26,7	-13,3	1425780	353780	-710220
II	1600	-33,3	16,7	1774224	446224	-889776

Таблиця 3

№	Моменти інерції частини відносно					
	власних центральних осей,			центральних осей фігури		
	$J_{z_i}^{i}$, $мм^4$	$J_{y_i}^{i}$, $мм^4$	$J_{z_i y_i}^{i}$, $мм^4$	J_{z}^{i}, $мм^4$	J_{y}^{i}, $мм^4$	J_{zy}^{i}, $мм^4$
I	1666667	66667	0	3092447	420447	-710220
II	53333	853333	0	1827557	1299557	-889776

Підсумовуючи останні три колонки таблиці, знаходимо моменти інерції фігури відносно центральних осей z, y:

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} = 3092447 + 1827557 = 4920004 \ (мм^4) \approx 492 \ (см^4);$$

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = 420447 + 1299557 = 1720004 \ (мм^4) \approx 172 \ (см^4);$$

$$J_{zy} = J_{zy}^I + J_{zy}^{II} = -710220 - 889776 = -1599996 \ (мм^4) \approx 160 \ (см^4).$$

3. Кут нахилу головних центральних осей u, υ до осі z визначимо за формулою:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot arctg\left(\frac{2 \cdot J_{zy}}{J_y - J_z} \right) = \frac{1}{2} \cdot arctg\left(\frac{2 \cdot (-1599996)}{1720004 - 4920004} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot arctg\left(\frac{-3199992}{-3200000} \right) \approx \frac{1}{2} \cdot arctg(1) = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22{,}5^\circ .$$

4. Головні центральні моменти інерції J_u і J_υ площі перерізу визначаємо за формулами:

$$J_u = \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y + \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(4920004 + 1720004 + \sqrt{(1720004 - 4920004)^2 + 4 \cdot (-1599996)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(6640008 + \sqrt{1024000000\ 0000 + 1023994880\ 0064} \right) \approx$$

$$\approx 5582743 \ (мм^4) \approx 558{,}3 \ (см^4) \ ;$$

$$J_\upsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(J_z + J_y - \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4 \cdot J_{zy}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(4920004 + 1720004 - \sqrt{(1720004 - 4920004)^2 + 4 \cdot (-1599996)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(6640008 - \sqrt{1024000000\ 0000 + 1023994880\ 0064} \right) \approx$$

$$\approx 1057265 \ (мм^4) \approx 105{,}7 \ (см^4) \ .$$

Головні центральні радіуси інерції будуть:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{5582743}{3600}} \approx 39{,}4 \ (мм), \quad i_\upsilon = \sqrt{\frac{J_\upsilon}{F}} = \sqrt{\frac{1058265}{3600}} \approx 17{,}1 \ (мм).$$

5. ***Графічне розв'язання*** даної задачі наведено на рис. 1, ***б***.

Нам треба визначити положення головних центральних осей u, υ, та значення головних центральних моментів інерції J_u, J_υ за відомими моментами інерції J_z, J_y, J_{zy} площі поперечного перерізу стрижня відносно будь-якої системи прямокутних центральних осей z, y. Для ***графічної побудови*** введемо в розгляд геометричну площину та віднесемо її до прямокутної системи координат. По осі абсцис відкладатимемо осьові моменти інерції $J_{oc}(J_z, J_y)$, а по осі ординат – відцентровий момент інерції $J_{вц}(J_{zy})$.

У геометричній площині (рис. 1, ***б***) будуємо точки D_z та D_y, які відповідають моментам інерції J_z, J_y відносно осей z та y. Абсцисами цих точок є осьові моменти інерції $OK_z = J_z = 492\ см^4$, $OK_y = J_y = 172\,см^4$, ординатами цих точок є відцентровий момент інерції J_{zy}, причому $K_zD_z = J_{zy} = 160\,см^4$, $K_yD_y = -J_{zy} = -160\,см^4$. Оскільки обидві точки D_z і D_y належать одному діаметру, то, сполучивши їх, матимемо центр ***C*** круга інерції. Із центра ***C*** описуємо коло радіусом

$$CD_z = CD_y = \sqrt{(CK_z)^2 + (K_zD_z)^2} = \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{492 - 172}{2}\right)^2 + (160)^2} = \sqrt{51200} \approx 226{,}3\ (см^4)\,,$$

яке перетинає вісь абсцис у точках ***A*** та ***B***, причому $CA = CB = 226{,}3\,см^4$.

Абсциси точок ***A*** і ***B*** — відрізки ***AO*** та ***OB*** — і є шуканими в графічному розв'язку головними центральними моментами інерції J_u, J_υ:

$$OA = OK_y + K_yC + CA = 172 + \frac{492 - 172}{2} + 226{,}3 = 558{,}3\ (см^4)\,;$$
$$OB = OK_y + K_yC - CB = 172 + \frac{492 - 172}{2} - 226{,}3 = 105{,}7\ (см^4)\,.$$

Для визначення напряму головних центральних осей, будуємо фокус круга інерції. Для цього з точки $D_z(D_y)$ проведемо лінію, паралельну осі $z(y)$, до перетину з кругом у фокусі ***M***. Сполучивши фокус ***M*** з точками ***A*** і ***B*** круга, дістанемо ***напрям головних центральних осей*** u та υ (рис. 1, ***б***).

Висновки. Таким чином, розглянутий метод поліпшення рівня засвоєння матеріалу шляхом алгоритмізації послідовності аналітичного розв’язування задач на знаходження геометричних характеристик поперечних перерізів стрижнів можна використовувати як під час проведення практичних занять з технічної механіки, так і при проведенні усіх інших форм занять.

Список літератури

1. Корець М.С. Професійна спрямованість фундаментальних навчальних дисциплін у фаховій підготовці вчителів технологій // Вища освіта України, 2006. – № 1. – С. 49–53.
2. Корець М.С. Науково-технічна підготовка вчителів для освітньої галузі «Технології» // Монографія. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2002. – 258 с.