

УДК 519.866

МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

Чистякова Тетяна

Науковий керівник: канд. ф.- м. наук, доцент кафедри прикладної математики, статистики та економіки Яременко Юрій Вікторович

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

Стаття присвячена системам масового обслуговування виробничих процесів різних типів та моделюванні їх роботи. Пораховано розподіл ймовірностей та операційні показники, такі як середнє число верстатів, що знаходяться в системі, середня кількість верстатів, що знаходяться в черзі, середня тривалість перебування верстатів в системі та в черзі, середня завантаженість системи, створені графи для систем масового обслуговування виробничих процесів, а також зроблено порівняльну характеристику та надані рекомендації для оптимізації роботи цих систем. Обчислення виконані також за допомогою Excel та Maple.

Ключові слова: система масового обслуговування, виробничі процеси, операційні показники.

MODELING OF THE WORK OF MASS-SERVICE SYSTEM OF MANUFACTURING PROCESSES

**Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Professor
Department of Applied Mathematics, Statistics and Economics Yaremenko Yuriy Viktorovich**

*The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky,
Ukraine*

The article is devoted to systems of mass service of various production processes and modeling of their work. Counted distribution of probabilities and operational parameters such as the average number of machine tools in the system, the average number of machines in queue, the average duration stay machine in system and in queuing, the average load of the system, the graphs for the systems of mass service of various production processes, the comparative characteristics and the recommendations for optimizing the work of these systems. Calculations are also performed using Excel and Maple.

Keywords: mass service system, production processes, operational indicators.

Постановка проблеми. В даний час гостро стоїть питання про поліпшення якості обслуговування населення. Це напряму пов'язано з економічною доцільністю роботи організацій, що надають послуги. Така тенденція торкнулася і підприємств, що випускають будь-яку продукцію.

Актуальність теми обумовлена тим, що системи масового обслуговування виробничих процесів оточують всюди. Прикладами СМО можуть бути підприємства з виготовлення будь-якої продукції, різні цехи тощо. Кожна з цих систем складається з певної кількості обслуговуючих одиниць (апаратів обслуговування). Такими апаратами може бути верстати, робітники, машини й інше. Моделювання систем масового обслуговування (СМО) дозволяють визначити критерії функціонування обслуговуючої системи. Цю інформація використовується потім для вибору належного рівня обслуговування.

Дослідивши реальні процеси, що відбуватимуться у житті, ми можемо прогнозувати якість роботи системи. Змінюючи параметри системи, користувач може простежити, як змінюється ефективності роботи. Ну а потім, можна взяти рішення, яких установках система працюватиме максимально продуктивно; скільки слід встановити апаратів, щоб час простою апарату було мінімально, а час зайнятості максимальним.

Аналіз досліджен і публікацій. А.К. Ерланг заклав основи теорії масового обслуговування в перші два десятиліття 20-го століття. В. Феллер ввів поняття процесу розмноження і загибелі, і теорія систем масового обслуговування привернула увагу математиків, як об'єкт серйозного дослідження. Багато науковців займалися вивченням систем масового обслуговування, але є доцільним вносити нові знання про них, адже з кожним днем збільшується кількість підприємств, заводів та інше, які потребують покращення.

Метою статті. Проведення аналізу моделювання систем масового обслуговування виробничих процесів різних типів.

Завдання роботи:

- зробити огляд основних понять систем масового обслуговування;
- побудувати математичні моделі для трьох різних конкретних систем масового обслуговування виробничих процесів та розрахувати їх функціональні показники;
- виконати порівняльний аналіз трьох моделей систем масового обслуговування та виявити їх недоліки та переваги.

Виробничий процес – це сукупність взаємопов'язаних дій людей, засобів праці та природи, потрібних для виготовлення продукції. Основними елементами виробничого процесу є процес праці як свідома діяльність людини, предмети та засоби праці. Виробничий процес і окремі його операції повинні бути раціонально організовані у просторі і часі. Для цього слід дотримуватися певних принципів при проектуванні та організації виробничого процесу. До таких принципів належать: спеціалізація, пропорційність, паралельність, прямо-точність, безперервність, ритмічність, автоматичність, гнучкість, гомеостатичність. [1, 69]

Моделювання – потужний метод наукового пізнання, який полягає в тому, що досліджуваний об'єкт чи процес відтворюється зі збереженням його найістотніших властивостей в іншому (якомога зручнішому для вивчення) вигляді.

Модель, за допомогою якої описують систему, може містити у собі тільки основні характеристики системи, інші, які не чинять суттєвого впливу на функціонування системи, відкидаються, щоб не ускладнювати процес моделювання. У більшості випадків вважається, що модель складається з трьох основних блоків: вхід, система, вихід. Для проведення моделювання можуть використовуватися різні методи.

Виробничі процеси можуть з плином часу перериватися в результаті часткового або й цілковитого виходу з ладу окремих вузлів, чи цілих агрегатів (станків верстатів, виробничих ліній, цехів тощо) що потребує налагодження цієї виробничої структури. Наперед неможливо передбачити ні часу виходу з ладу такої структури, ні часу для її налагодження. Обидві ці величини з

випадковими змінними розподіленні за експонентним законом відповідно з параметрами λ та μ ($\lambda > 0, \mu > 0$).

СМО виробничих процесів є трьох видів, а саме системи масового обслуговування виробничих процесів з однією лінією обслуговування ($M/M/1$): ($GD/m/m$), де символ GD це дисципліна черги не регламентована (якщо деякий верстат вийшов з ладу, а робітник-налагоджувач незайнятий в цей момент часу обслуговуванням якогось іншого верстата, то він відразу починає налагоджувати зіпсований верстат, в протилежному випадку – утворюється черга на обслуговування з верстатів що вийшли з ладу), системи масового обслуговування виробничих процесів з декількома лініями обслуговування ($M/M/n$): ($GD/m/m$) (робітників-налагоджувачів більше одного) та системи масового обслуговування виробничого процесу розподільчого типу ($M/M/m$): ($GD/m/m$) (система в якій декілька споживачів використовують деякий ресурс з одного джерела постачання, причому, вимоги на постачання цього ресурсу та необхідні об'єми його, незалежні між собою). [3, 624],

Ми побудували математичні моделі трьох СМО виробничих процесів різних типів та порахували їх функціональні характеристики з інтенсивністю потоку вимог $\lambda = 1$ (1/год) та інтенсивністю потоку обслуговування $\mu = 5$ (1/год). В СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування ми мали одного робітника-налагоджувача, в СМО виробничих процесів з декількома лініями обслуговування ми мали $n = 2$ робітників-налагоджувачів, в обох системах було $t = 4$ верстата. В СМО виробничих процесі ми мали чотирьох робітників, кожен з яких був джерелом вимог, який обслуговувався однією лінією обслуговування, яка індивідуальним відгалуженням від основного джерела його обслуговувала.

Знайдемо розподіл ймовірностей для СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування.

Можливі стани системи: E_0 – всі верстати справні; E_1 – один верстат несправний, E_2 – два верстата несправні (один верстат ремонтується, інший в

черзі), E_3 – три верстата несправні (один ремонтується, два інші в черзі), E_4 – несправні всі чотири верстата (один ремонтується, три в черзі).

Така система масового обслуговування, з математичної точки зору, є процесом розмноження і вимирання з коефіцієнтами

$$\lambda_k t = m - k \cdot \lambda,$$

$$\mu_0 t = 0,$$

$$\mu_1 t = \mu_2 t = \dots = \mu_m t = \mu \text{ відповідно.}$$

Тому $\lambda_0 = 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, а $\mu_1 t = \mu_2 t = \mu_3 t = \mu_4 = 5$.

Використовуючи правило Колмогорова, запишемо систему диференціальних рівнянь для ймовірності стану:

$$p'_0(t) = -4p_0 t + 5p_1 t,$$

$$p'_1(t) = 4p_0 t - 8p_1 t + 5p_2 t,$$

$$p'_2(t) = 3p_1 t - 7p_2 t + 5p_3 t,$$

$$p'_3(t) = 2p_2 t - 6p_3 t + 5p_4 t,$$

$$p'_4(t) = p_3 t - 5p_4 t.$$

Задаємо $p'_k t = 0$, ($k = 0,1,2,3,4$), тоді ці ймовірності є розв'язком наступної системи алгебраїчних рівнянь:

$$4p_0 = 5p_1,$$

$$8p_1 = 4p_0 + 5p_2,$$

$$7p_2 = 3p_1 + 5p_3,$$

$$6p_3 = 2p_2 + 5p_4,$$

$$5p_4 = p_3.$$

Звідси отримуємо рекурентні формули:

$$4p_0 = 5p_1,$$

$$3p_1 = 5p_2,$$

$$2p_2 = 5p_3,$$

$$p_3 = 5p_4.$$

Послідовно підставляючи $k = 4 - 1, 4 - 2, \dots, 1, 0$ отримаємо

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1}{4!} (5)^4 p_4, \\
 p_1 &= \frac{1}{3!} (5)^3 p_4, \\
 p_2 &= \frac{1}{2!} (5)^2 p_4, \\
 p_3 &= \frac{1}{1!} (5)^1 p_4.
 \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{625}{24} p_4, \\
 p_1 &= \frac{125}{6} p_4, \\
 p_2 &= \frac{25}{2} p_4, \\
 p_3 &= 5p_4,
 \end{aligned}$$

де $k = 0,1,2,3,4$. Ймовірність p_4 знаходимо з умови $\sum_{k=0}^m p_k = 1$. Тоді одержимо:

$$\begin{aligned}
 p_4 &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\mu^k}{\lambda^k} = 1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24} = 1 + \frac{120 + 300 + 500 + 625}{24} = \frac{24}{1569} = 0,015.
 \end{aligned}$$

Цю ймовірність ми знайшли за допомогою формули Ерланга, яка показує ймовірність того, що всі 4 верстати в решті-решт у якийсь час вийдуть з ладу, а робітник-налагоджувач не встигатиме налагодити ні одного з них.

Підставимо нашу ймовірність p_4 в інші рівності, і отримаємо

$$\begin{aligned}
 p_3 &= \frac{1250}{1569} = 0,076, \\
 p_2 &= \frac{300}{1569} = 0,191, \\
 p_1 &= \frac{500}{1569} = 0,319, \\
 p_0 &= \frac{625}{1569} = 0,398.
 \end{aligned}$$

Знайдемо розподіл ймовірностей для СМО виробничих процесів з декількома лініями обслуговування.

Можливі стани системи: E_0 – всі верстати справні (робітники не зайняті); E_1 – один верстат несправний (один робітник незайнятий), E_2 – два верстата несправні (обидва робітники-налагоджувачі зайняті), E_3 – три верстата несправні (два ремонтується, один в черзі), E_4 – несправні всі чотири верстата (два ремонтується, два в черзі).

Така система масового обслуговування, з математичної точки зору, є процесом розмноження і вимирання з коефіцієнтами

$$\lambda_k t = m - k \cdot \lambda,$$

$$\mu_0 t = 0,$$

$$\mu_k t = k\mu, \text{ якщо } 1 \leq k \leq 2;$$

$$\mu_k t = n\mu, \text{ якщо } 2 \leq k \leq 4.$$

Тому $\lambda_0 = 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, а $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 5$, $\mu_3 = 10$, $\mu_4 = 10$.

Випадковий процес, при $1 \leq k \leq m$, описується системою диференціальних рівнянь

$$p'_0 = -4p_0 t + 5p_1 t,$$

$$p'_1 = 4p_0 t - 8p_1 t + 10p_2 t,$$

$$p'_2 = 3p_1 t - 12p_2 t + 10p_3 t,$$

$$p'_3 = 2p_2 t - 11p_3 t + 10p_4 t,$$

$$p'_4 = p_3 t - 10p_4 t.$$

Алгебраїчна система рівнянь матиме вигляд:

$$4p_0 = 5p_1,$$

$$8p_1 = 4p_0 + 10p_2,$$

$$12p_2 = 3p_1 + 10p_3,$$

$$11p_3 = 2p_2 + 10p_4.$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Звідси отримуємо рекурентні формулу:

$$4p_0 = 5p_1,$$

$$3p_1 = 10p_2,$$

$$2p_2 = 10p_3,$$

$$p_3 = 10p_4.$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Ймовірність p_0 знаходимо за формулою:

$$p_0 = \frac{1}{(1 + \sum_{k=1}^4 C_k)}$$

Спочатку знаходимо константи C_k :

$$C_1 = \frac{4 \cdot 1}{5} = 0,8,$$

$$C_2 = \frac{4-1 \cdot 4}{2!} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{6}{25} = 0,24,$$

$$C_3 = \frac{4-2 \cdot 4}{3!} \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{2}{125} 0,01,$$

$$C_4 = \frac{4-3 \cdot 4}{4!} \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{1250} = 0,0002.$$

Отже

$$p_0 = 0,478.$$

Так як

$$p_1 = C_1 p_0, p_2 = C_2 p_0, p_3 = C_3 p_0, p_4 = C_4 p_0,$$

отримуємо:

$$p_1 = 0,382,$$

$$p_2 = 0,115,$$

$$p_3 = 0,023,$$

$$p_4 = 0,002.$$

Знайдемо розподіл ймовірностей для СМО виробничих процесів розподільчого типу.

Система масового обслуговування виробничого процесу розподільчого типу є процесом розмноження та вимирання. Інтенсивності розмноження $\lambda_k(t)$ та вимирання $\mu_k(t)$ якого виражаються наступним чином:

$$\lambda_k t = n - k \lambda, \mu_k t = k\mu, \text{ де } 0 \leq k \leq n.$$

Тому

$$\lambda_0 t = 4, \mu_1 t = 5,$$

$$\lambda_1 t = 3, \mu_2 t = 10,$$

$$\lambda_2 t = 2, \mu_3 t = 15,$$

$$\lambda_3 t = 1, \mu_4 t = 20.$$

Можливі стани системи: E_0 – в системі не знаходиться ні одного верстата; E_1 – в системі один верстат, E_2 – два верстата в системі, E_3 – три верстата в системі, E_4 – всі чотири верстата з робітниками знаходяться в системі.

Запишемо систему диференціальних рівнянь для ймовірності стану:

$$\begin{aligned} p'_0 t &= -4p_0 t + 5p_1 t, \\ p'_1 t &= 4p_0 t - 8p_1 t + 10 p_2 t, \\ p'_2 t &= 3p_1 t - 12p_2 t + 15p_3 t, \\ p'_3 t &= 2p_2 t - 16p_3 t + 20p_4 t, \\ p'_4 t &= p_3(t) - 20p_4 t. \end{aligned}$$

Алгебраїчна система рівнянь в нашому випадку буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} 4p_0 &= 5p_1, \\ 8p_1 &= 4p_0 + 10p_2, \\ 12p_2 &= 3p_1 + 15p_3, \\ 16p_3 &= 2p_2 + 20p_4, \\ 20p_4 &= p_3. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо рекурентні формули:

$$\begin{aligned} 4p_0 &= 5p_1, \\ 3p_1 &= 10p_2, \\ 2p_2 &= 15p_3, \\ p_3 &= 20p_4. \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \end{aligned}$$

Розв'язок ймовірностей має вигляд

$$p_k = C_m^k \frac{\lambda^k}{\lambda + \mu} \frac{\mu^{m-k}}{\lambda + \mu},$$

$$\text{де } C_m^k = \frac{m!}{k! (m-k)!}.$$

Порахуємо для кожної ймовірності. Маємо

$$p_0 = C_4^0 \frac{1}{6}^0 \frac{5}{6}^4 = 0,482,$$

$$p_1 = C_4^1 \frac{1}{6}^1 \frac{5}{6}^3 = 0,386,$$

$$p_2 = C_4^2 \frac{1}{6}^2 \frac{5}{6}^2 = 0,116,$$

$$p_3 = C_4^3 \frac{1}{6}^3 \frac{5}{6}^1 = 0,015,$$

$$p_4 = C_4^4 \frac{1}{6}^4 \frac{5}{6}^0 = 0,0008.$$

В таблиці 1 порівняємо розподіл ймовірностей для кожної СМО виробничих процесів.

Таблиця 1.

Ймовірності	СМО вир. процесів з однією лінією обслуговування	СМО вир. процесів з декількома лініями обслуговування	СМО вир. процесів розподільчого типу
p_0	0,398	0,488	0,482
p_1	0,319	0,390	0,386
p_2	0,191	0,117	0,116
p_3	0,076	0,005	0,015
p_4	0,015	0,0001	0,008

Найбільша ймовірність в усіх системах того, що в системі не буде знаходитися ні одного робітника і, що всі верстати будуть справні. Це говорить про те, що найбільше часу верстати будуть в робочому стані і для підприємства це перевага, але ж і робітник-налагоджувач буде багато часу без роботи, а це вже недолік, адже підприємство платить йому зарплатню.

Знайдемо функціональні характеристики для СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування.

Щоб знайти середнє число верстатів, що знаходяться в системі використаємо формулу:

$$L_s = \sum_{k=0}^m k p_k.$$

Звідси

$$L_s = 0 \cdot 0,398 + 1 \cdot 0,319 + 2 \cdot 0,121 + 3 \cdot 0,076 + 4 \cdot 0,015 = 0,992.$$

Щоб знайти середню кількість верстатів, що знаходяться в черзі на полагодження використаємо формулу:

$$L_q = m - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - p_0).$$

Звідси

$$L_q = 4 - \frac{1 + 5}{1} (1 - \frac{625}{1569}) = 4 - 6 \frac{944}{1569} = 4 - \frac{5664}{1569} = \frac{6276 - 5664}{1569} = \frac{612}{1569} = 0,390.$$

Щоб знайти середню тривалість перебування верстата в системі використаємо формулу:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{еф}}},$$

де $\lambda_{\text{еф}} = \lambda - \lambda \cdot p_m = 1 - 1 \cdot 0,015 = 0,985$. Звідси

$$W_s = \frac{0,992}{0,985} = 1,007.$$

Щоб знайти середню тривалість перебування верстата в черзі використаємо формулу:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}.$$

Звідси

$$W_q = 1,007 - \frac{1}{5} = 0,807.$$

Щоб знайти середню завантаженість системи використаємо формулу:

$$c = L_s - L_q.$$

Звідси

$$c = 0,992 - 0,390 = 0,602.$$

Знайдемо функціональні характеристики для СМО виробничих процесів з декількома лініями обслуговування.

Середнє число верстатів, що знаходяться в системі:

$$L_s = 0 \cdot 0,478 + 1 \cdot 0,382 + 2 \cdot 0,115 + 3 \cdot 0,022 + 4 \cdot 0,002 = 0,690.$$

Щоб знайти середню кількість верстатів, що знаходяться в черзі на полагодження використаємо формулу:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_{\text{еф}}}{\mu},$$

де $\lambda_{\text{еф}} = \lambda \cdot m - L_s = 1 \cdot (4 - 0,69) = 3,31$. Звідси

$$L_q = 0,69 - \frac{3,31}{5} = 0,028.$$

Щоб знайти середню тривалість перебування верстата в системі використаємо формулу:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{еф}}}.$$

Звідси

$$W_s = \frac{0,69}{3,31} = 0,208.$$

Щоб знайти середню тривалість перебування верстата в черзі використаємо формулу:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{еф}}}.$$

Звідси

$$W_q = \frac{0,028}{3,31} = 0,008.$$

Щоб знайти середню завантаженість системи використаємо формулу:

$$c = L_s - L_q.$$

Звідси

$$c = 0,69 - 0,028 = 0,662.$$

Знайдемо функціональні характеристики для СМО виробничих процесів розподільчого типу.

Середнє число знаходження верстатів в системі:

$$L_s = 0 \cdot 0,482 + 1 \cdot 0,386 + 2 \cdot 0,116 + 3 \cdot 0,015 + 4 \cdot 0,0008 = 0,667.$$

Для знаходження середньої тривалості знаходження верстатів в системі використаємо формулу:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{эф}}$$

Так як $\lambda_{эф} = m\lambda = 4$,

$$W_s = \frac{0,667}{4} = 0,167.$$

В таблиці 2 порівняємо основні функціональні характеристики для СМО виробничих процесів різних типів.

Таблиця 2.

Функціональні характеристики	СМО вир. процесів з однією лінією обслуговування	СМО вир. процесів з декількома лініями обслуговування	СМО вир. процесів розподільчого типу
$\lambda_{эф}$	0,985	3,36	1
L_s	0,992	0,64	0,667
L_q	0,390	-0,032	-
W_s	1,007	0,191	0,667
W_q	0,807	-0,009	-
c	0,602	0,672	-

В СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування ефективна інтенсивність надходження клієнтів менша за інтенсивність надходження

клієнтів в систему $\lambda_{\text{еф}} < \lambda$, це говорить про те, що не всі верстати можуть відразу потрапити в систему, тобто на ремонт. В цій системі середнє число верстатів в черзі $L_q = 0.390$ та середня тривалість перебування верстата в черзі $W_q = 0,807$ досить невеликі. В СМО виробничих процесів з декількома лініями обслуговування черга відсутня, адже $\lambda_{\text{еф}} > \lambda$. Черга також відсутня і в СМО виробничих процесів розподільного типу, тому що система вміщує в собі стільки клієнтів скільки потрібно.

Для ефективної роботи СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування непотрібно нічого змінювати, адже зі збільшенням кількості верстатів збільшиться і середнє число верстатів в черзі та їх середня тривалість перебування в черзі, що негативно вплине на роботу підприємства.

Так, як інтенсивність потоку вимог та інтенсивність потоку обслуговування однакові для всіх систем, а різниця між СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування і СМО виробничих процесів з декількома лініями обслуговування лише в кількості робітників-налагоджувачів, в першому випадку $n = 1$, в другому $n = 2$, можемо запропонувати для покращення ефективності роботи СМО виробничих процесів з декількома лініями обслуговування збільшити кількість верстатів в два рази, тобто, щоб їх було $m = 8$.

В СМО виробничих процесів розподільного типу ми нічого не можемо змінити, але потрібно сказати, що для такої системи взяті не дуже коректні інтенсивність потоку вимог та інтенсивність потоку обслуговування, адже для ефективної роботи цієї системи інтенсивність потоку вимог повинно значно перевищувати інтенсивність потоку обслуговування. [2, с. 186]

Висновки: в ході написання роботи було

1. наведено основні поняття СМО, їх класифікація та розглянуто теоретичні відомості кожного типу СМО виробничих процесів;
2. для трьох математичних моделей СМО $(M/M/1):(GD/m/m)$, $(M/M/n):(GD/m/m)$, $(M/M/m):(GD/m/m)$ виробничих процесів з заданими числовими параметрами:
 - побудовано графи для кожної системи;

- розраховано основні функціональні показники, а саме середнє число верстатів, що знаходяться в системі, середня кількість верстатів, що знаходяться в черзі, середня тривалість перебування верстата в системі, середня тривалість перебування верстата в черзі, середню завантаженість системи;
 - проведено розрахунки розподілу граничних ймовірностей в програмі Excel та за допомогою пакету Maple;
3. виконали порівняльний аналіз СМО виробничих процесів різних типів (M/M/1):(GD/4/4), (M/M/2):(GD/4/4), (M/M/4):(GD/4/4) при значеннях інтенсивності надходження клієнтів в систему $1 \frac{1}{\text{год}}$ та інтенсивності обслуговування клієнтів $5 \frac{1}{\text{год}}$, та виявлено їх переваги і недоліки, зокрема,
- найбільша ймовірність в усіх системах того, що в системі не буде знаходитися ні одного робітника і, що всі верстати будуть справні, що свідчить про те, що найбільше часу верстати будуть в робочому стані;
 - в СМО (M/M/1):(GD/4/4) не всі верстати можуть відразу потрапити в систему, тобто на ремонт, існує черга, в СМО (M/M/2):(GD/4/4) та (M/M/4):(GD/4/4) черга відсутня;
 - найефективніше працює СМО виробничих процесів з однією лінією обслуговування.

На основі даних з підприємств, що являються СМО виробничих процесів можна дослідити не тільки їх функціональні показники, а й економічні, щоб дати рекомендації на мінімізацію їх витрат та покращення ефективності роботи.

Список літератури:

1. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів : навчальний посібник : у 2 ч. / С. В. Коломієць ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. - Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2013. Ч. II. - 103 с.
2. Сеньо П.С. Випадкові процеси: Підручник – Львів: Компакт – ЛВ, 2006 – 288с.
3. Советов, Б. Я. Моделирование систем [Текст]: навчальний посібник / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев – М.: Высшая школа, 2001. – 343с.