УДК 551.577.1

ДОВГОСТРОКОВЕ ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ ОПАДІВ В МІСТІ КИЇВ

Сандирєва Марина, Акбаш Катерина

Анотація. *У статті розглядається довгострокове прогнозування екстремальної річної кількості опадів у місті Київ за допомогою теорії екстремальних значень на основі багаторічних статистичних даних. На основі отриманих результатів, можна передбачити та підготуватися до екстремальної кількості опадів, щоб уникнути значної шкоди у багатьох сферах людської діяльності. На основі щоденних даних опадів у м. Київ за період з 1882 по 2005 рр. знайдені: максимальна кількість опадів, яка може бути досягнута у найближчі 100 років з надійністю 99 % та максимальна кількість опадів, яка не буде перевищена у найближчі 100 років з надійністю 99 %.*

Ключові слова: сумарні річні опади, теорія екстремальних значень, екстремальна кількість опадів

LONG-TERM FORECASTING OF EXTREME NUMBER OF DANGERS IN THE CITY OF KYIVM

Abstract. *The article deals with the long-term forecasting of the extreme annual rainfall in the city of Kyiv with the help of the theory of extreme values based on multi-year statistical data. Based on the results obtained, it is possible to predict and prepare for an extreme amount of precipitation in order to avoid significant damage in many areas of human activity. Based on daily precipitation data in Kyiv for the period from 1882 to 2005 we found: the maximum amount of precipitation that can be reached in the next 100 years with a reliability of 99% and the maximum amount of precipitation that will not be exceeded in the next 100 years with reliability 99%.*

Keywords: total annual precipitation, theory of extreme values, extreme rainfall

Постановка проблеми. Хоча погода сильно впливає на наше життя, більшою мірою її пророкують в економічних цілях. Незважаючи на це, основними користувачами метеорологічних послуг виступають авіація і морський транспорт, оскільки від природних явищ багато в чому залежить пересування по повітрю і по морю. Відомості про опади потрібні туристичним агентствам, що організовують поїздки у ті або інші країни, і сільськогосподарській галузі – інформація кількості атмосферних опадів грає велику роль в продуктивності при вирощуванні рослин. Знання прогнозу опадів може стати в нагоді в будівництві при проведенні робіт на відкритому повітрі, а також підприємствам культурної сфери, які займаються організацією фестивалів, спортивних змагань та інших заходів. Тобто прогнозами погоди користується багато хто, навіть трейдери на фондових ринках. Але головне завдання метеорологів – попередження населення про стихійні лиха, що дозволяє вчасно підготуватися до них і уникнути людських жертв.

Аналіз досліджень і публікацій. Корені теорії екстремальних значень сягають глибини століть: таблиці смертності – Дж. Граунт, К. Гюйгенс (1662), роботи М. Бернуллі (1709), Л. Ейлера (1760), так званий розподіл Гомперца часу тривалості життя (1825). Але початок класичної теорії екстремальних значень незалежних випадкових величин звичайно пов’язують із роботами М. Фреше (1927), який вперше строго математично одержав один з граничних розподілів для максимальних значень, та Р. Фішера і Л. Тіппета (1928), які в доповнення до граничного розподілу Фреше знайшли два інших типи розподілів екстремальних значень. Центральний результат теорії – теорема про екстремальні типи був доведений у повному обсязі Б. В. Гнєденком (1943). Фактично три останні роботи й визначили подальший розвиток теорії екстремальних значень [1].

Прогнозуванням погоди різними методами в різні роки займалися Клівленд Еббе, Вільгельм Бьєркнес, Льюіс Фрай Річадсон та Джул Чарні. Тому цікавою є задача прогнозування кількості опадів за допомогою теорії екстремальних значень.

Мета статті: на основі статистичних даних про щоденну кількість опадів в м. Київ за період з 1900 по 2015 рр. зробити довгострокове прогнозування максимальної річної кількості опадів, застосовуючи теорію екстремальних значень.

В дослідженні ставилася задача визначити максимально можливу річну кількість опадів x_{max} та критичну кількості опадів $x_{max}(100)$, яку не буде перевищено протягом 100 років з надійністю $p = 0,99$, застосовуючи теорію екстремальних значень.

Для статистичної інтерпретації задачі розглядається максимальна щорічна кількість опадів за місяць у місті Київ за 124 роки (1882-2005), яка вимірюється в мм [2].

Нехай випадкова величина X – це максимально можлива кількість опадів, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вибірка незалежних спостережень X (для нашого прикладу об'єм вибірки $n = 124$).

Перш ніж застосовувати теорію екстремальних значень для визначення максимальної кількості опадів, треба визначити до якого типу розподілу відноситься наша випадкова величина X.

Із теореми 1.2 (Б. В. Гнєденко про екстремальні типи) можна припустити, що вона буде мати один із трьох типів розподілів: $\Phi_\alpha(x), \psi_\alpha(x), \Lambda(x)$ [1, с. 30].

Зробимо припущення, що X має тип розподілу $\Lambda(x)$, тобто

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi}{\alpha} + q , \qquad (1)$$

де $\alpha > 0$, q – невідомі параметри, а випадкова величина ξ має функцію розподілу $\Lambda(x)$.

За допомогою критерію χ^2 перевіримо максимальні щорічні кількості опадів на нормальний розподіл.

Для обчислення критерію χ^2 зіставляють різниці між емпіричними частотами і теоретичними (обчисленими).

Спочатку слід сформувати статистичні гіпотези:

- H0: емпіричний розподіл не відрізняється від теоретичного;
- H1: емпіричний розподіл відрізняється від теоретичного не випадково.

Далі будуємо ряд розподілу частот за допомогою програми MS Excel функції ЧАСТОТА, а також розраховуємо і записуємо у сусідні стовпці відносну частоту, накопичену частоту та відносну накопичену частоту. До відносних частот застосовуємо ПРОЦЕНТНИЙ формат. До цієї частотної таблиці будуємо гістограму розподілу та кумуляту (Рис.1).

Таблиця 1. Основні показники для визначення частоти

	Xmin	62		
	Xmax	239		
$R = (X\,max) - (X\,min)$	розмах R	177		
$5 \cdot l\,g\,N$	к-ть класів (К)	10,47		
$I = R / K$	I	16,91011	16,91	крок
$L = X\,min - i/2$	L	53,545	нижня межа	

Таблиця 2. Частотна таблиця максимальної щорічної к-сті опадів

	Верхня границя класу	частота max кількості опадів	**частоти**		
	53,545	0	Відносна	Накопичена	Відн накоп.
53,545	70,455	5	4,03%	5	4,03%
70,455	87,365	15	12,10%	20	16,13%
87,365	104,275	31	25,00%	51	41,13%
104,275	121,185	19	15,32%	70	56,45%
121,185	138,095	16	12,90%	86	69,35%
138,095	155,005	14	11,29%	100	80,65%
155,005	171,915	9	7,26%	109	87,90%
171,915	188,825	6	4,84%	115	92,74%
188,825	205,735	5	4,03%	120	96,77%
205,735	222,645	2	1,61%	122	98,39%
222,645	239,555	2	1,61%	124	100,00%

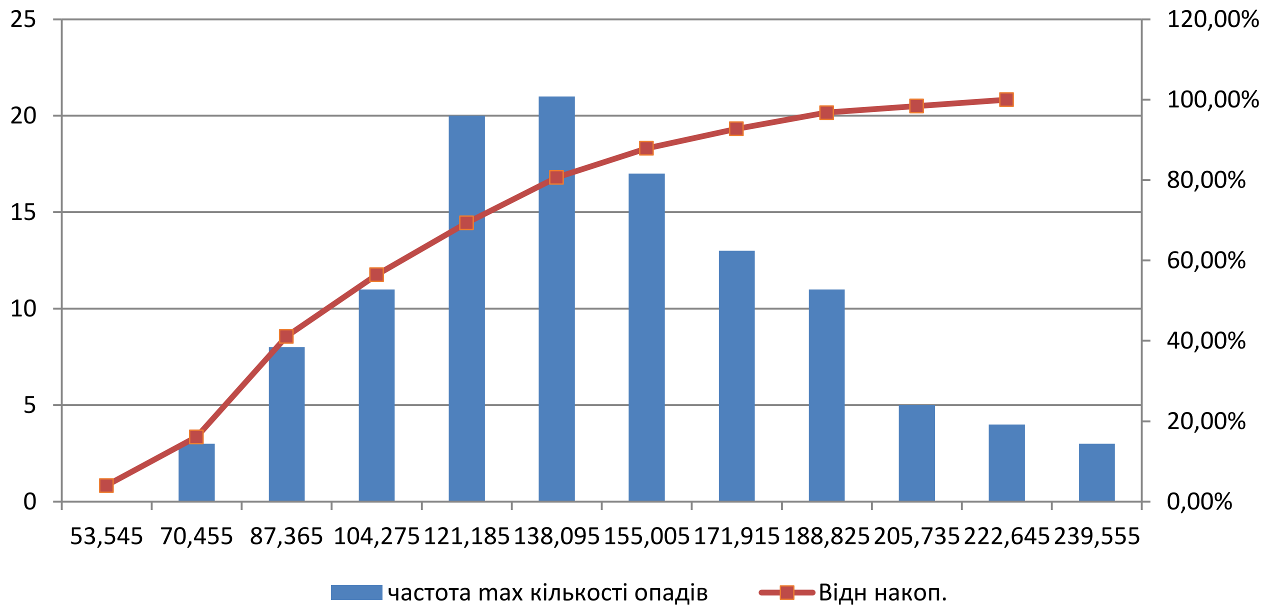

Рис.1. Гістограма та кумулята розподілу

В MS Excel формуємо таблицю, використавши функції НОРМАЛІЗАЦІЯ та НОРМСТРАСП:

де X_i – нижня границя класового інтервалу;

X_{i+1} – верхня границя класового інтервалу;

Z_i та Z_{i+1} – нормалізовані значення границь класового інтервалу;

у таблиці $Z_i = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(X_i; \text{середнє}; \text{відхилення})$;

$\Phi(Z_i)$ та $\Phi(Z_{i+1})$ – значення функції Лапласа. У таблиці можна замість функції Лапласа застосувати інтегральну функцію стандартного нормального розподілу $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ $(F(z) = \text{НОРМСТРАСП}(z))$, яка пов'язана з функцією Лапласа рівнянням $F(z) = \frac{1}{2} + \Phi(z)$, оскільки константа не впливатиме на кінцевий результат [3].

На одному графіку будуємо гістограми емпіричного та теоретичного розподілів (Рис.2). Порівнюємо ряд розподілу частот за емпіричною вибіркою з отриманим теоретичним (нормальним) рядом за допомогою критерія χ^2 Пірсона.

$\chi^2_{\text{сп}} = 19{,}3 < \chi^2_{\text{кр}}(0{,}01; 8) = 20{,}1$. Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} \in [0;\ 20{,}1]$, то нульова гіпотеза H_0 - про нормальний закон розподілу приймається.

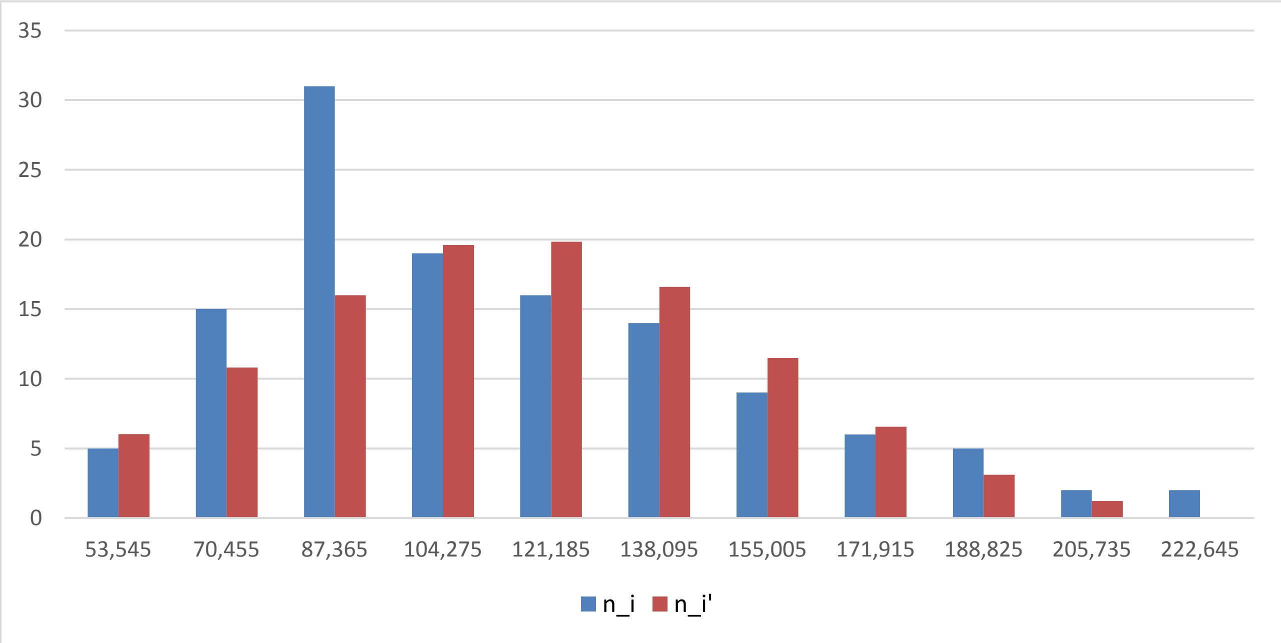

Рис.2. Порівняння емпіричних та теоретичних частот

Тому статистичний ряд максимальної кількості опадів за місяць по рокам є нормальним розподілом.

Отже, якщо вважати, що рівність (1) вірна, то максимальну кількість опадів x_{max} знаходимо із рівностей

$$P\ \ X < x_{max}\ \ = P\ \ \frac{\xi}{\alpha} + q < x_{max}\ \ = P\ \ \xi < \alpha\ \ x_{max} - q\ \ \ = 0{,}99. \qquad (2)$$

Позначимо через U_p квантиль рівня p розподілу $\Lambda(x)$.

Тоді $U_p = -\ln(-\ln p)$, а $U_{0,99} = 4{,}6.$

Із рівності (2) маємо $U_{0.99} = \alpha(x_{max} - q)$ і, відповідно,

$$x_{max} = \frac{6{,}907}{\alpha} + q. \qquad (3)$$

Таким чином для знаходження x_{max} залишається оцінити параметри α і q. Для цього застосовуємо рівність (1)

$$MX = \frac{M\xi}{\alpha} + q, \qquad DX = \frac{D\xi}{\alpha^2}$$

Відомо (див. зауваження 1.1 [1]), що $M\xi = c \approx 0{,}577$ – константа Ейлера, $D\xi = \frac{\pi^2}{6}$. Тоді $\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{DX}}{\overline{D\xi}} \approx \frac{\overline{DX}}{1{,}645}$, $q \approx MX - \frac{0{,}577}{\alpha}$.

Скориставшись класичними оцінками методу найменших квадратів $MX \approx x = \frac{1}{n}\ {}_{i=1}^{n} x_i$, $DX \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\ {}_{i=1}^{n}\ x_i - x\ ^2$, отримуємо

$$\frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{S^2}}{1{,}645} = \frac{\overline{1394{,}65}}{1{,}645} = 29{,}12$$

$$q = q = x - \frac{0,577}{\alpha} = 121,44 - \ 0,577 * 29,12 \ = 104,64.$$

Тепер, згідно рівності (3) обчислюємо:

$x_{max} = \frac{6,907}{\alpha} + q = \ 6,907 * 29,12 \ + 104,64 = 239.$

Далі розглядаємо близьку задачу знаходження такої критичної кількості опадів $x_{max}(100)$, яку не буде перевищено протягом 100 років з надійністю $p = \ 0,99$.

Покладемо $Z_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$, X_i – незалежні однаково розподілені випадкові величини, $X_i \overset{\text{def}}{=} X$. Тоді відповідне критичне значення $x_{max}(100)$ шукаємо із рівності $P\ Z_{100} < x_{max}\ 100\ \ = 0,99$, яка еквівалентна такій

$$P\ X < x_{max}\ 100\ ^{100} = P\ \xi < \alpha\ x_{max}\ 100\ - q\ ^{100} = \exp(-\exp(-\alpha\ x_{max}\ 100\ - q\ + 2\ln 10)) = 0,99.$$

З останньої рівності маємо $\alpha\ x_{max}\ 100\ - q\ - 2\ln 10 = U_{0,99} = 4,6$,

а отже, $x_{max}\ 100\ = \frac{(6,91+2\ln 10)}{\alpha} + q \approx 373.$

Отже, максимальна кількість опадів за місяць в місті Київ, яка може буде досягнута у найближчі 100 років при рівні надійності 99 % рівна x_{max} = 239 мм, а максимальна кількість опадів за місяць в місті Київ, яка не буде перевищена у найближчі 100 років при рівні надійності 99 % буде рівна $x_{max}\ 100\ = 373$ мм (Рис.3).

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. На основі щоденних даних опадів у м. Київ за період з 1882 по 2005 рр. знайдені:

a. максимальна кількість опадів $x_{max} = 239$ мм, яка може бути досягнута у найближчі 100 років з надійністю 99 %;

b. максимальна кількість опадів $x_{max}\ 100\ = 373$ мм, яка не буде перевищена у найближчі 100 років з надійністю 99 %.

Виходячи з отриманих розрахунків прогнозування максимальної річної кількості опадів можна уникнути великих збитків у різних галузях, у тому числі й економіці.

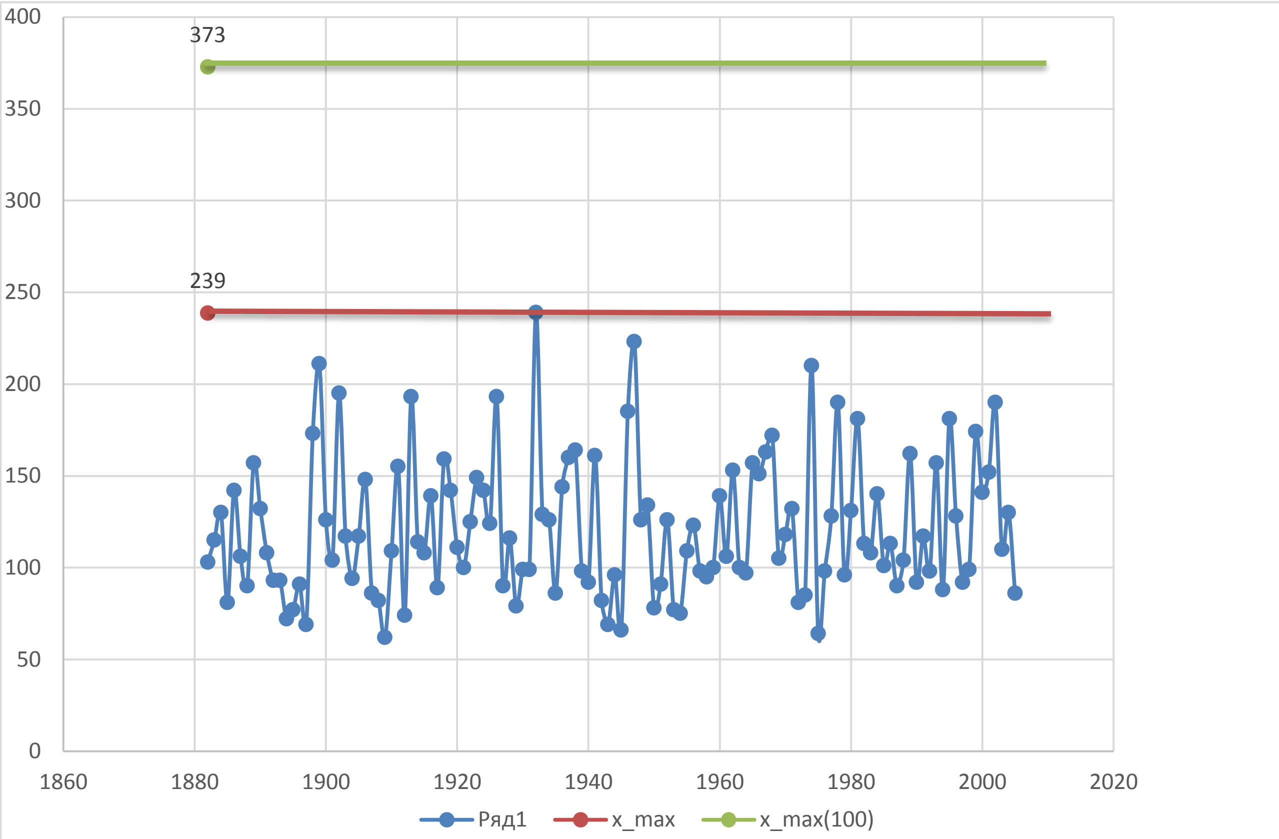

Рис.3 Порівняння екстремальних кількостей опадів з максимальною кількістю опадів за місяць за період з 1882 по 2005 рр.

Список літератури

1. Мацак І.К. Елементи теорії екстремальних значень: монографія – К.: «ЦП Компринт», 2014 – 209 с.
2. Термограф [Електронний ресурс]: архівні дані температури повітря та кількості опадів в місті Київ. – Режим доступу: http://thermograph.ru/
3. Лупан І.В., Авраменко О.В., Акбаш К.С. Кіровоград: «КОД» 2015. – 236 с. Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України (лист №1/11-5601 від 18.03.13) Кіровоград: КП «Поліграфія» 2015. – 142 с.