УДК 512.29

ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ РЯДІВ НА ОСНОВІ МНОГОЧЛЕНІВ БЕРШТЕЙНА

Ровінський Я.Г.

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Робота присвячена побудові і практичній перевірці моделі знаходження прогнозних значень часового ряду на основі многочленів Берштейна.

Ключові слова: фінансовий ряд, многочлен Берштейна, формозберігаюче перетворення.

FORGIVENING OF FINANCIAL LINES BASED ON MULTIPLE BORSHTEIN

Rovinsky Ya.G.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The work is devoted to the construction and practical verification of the model for finding predictive values of the time series on the basis of Berstein polynomials.

Keywords: financial series, polynomial of Berstein, form-preserving transformation.

Часові ряди є математичним об’єктом, який широко використовується в різних областях прикладного характеру. Часовими рядами є масив значень температур, курси валют, фінансові індекс (зокрема індекс Доу-Джонса), курси акцій тощо. В зв’язку з цим актуальною є задача побудови прогностичної схеми, яка б давала найкращий практичний ефект в конкретній ситуації. Незважаючи на те, що існує велика кількість різних схем прогнозування, серед яких найпоширенішими класичними є регресійна, інтерполяційна, на основі ковзних середніх, тощо або ж такі екзотичні системи як модель Бокса-Дженінкса, адаптивні моделі, нейронні сітки, гармонійний аналіз, побудова нових моделей є актуальною і важливою задачею адже не існує ідеальної системи, яка б працювала завжди.

Поліноми Бернштейна — алгебраїчні поліноми, що є лінійною комбінацією базисних поліномів Бернштейна. Названі на честь українського математика ***Сергія Натансоновича Бернштейна***, який вперше їх вивчав у зв'язку з доведенням теореми Вейєрштрасса [4]. Поліноми Берштейна мають вигляд

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, x \in [0;1], f \in C[0;1].$$

Поліноми широко використовуються у обчислювальній математиці, теорії ймовірностей, комп'ютерній графіці, зокрема для визначення кривих Без'є. Однак, найпершим стимулом до їх появи була теорема Вейєрштрасса, яка стверджувала, що для довільної неперервної функції існує рівномірно збіжна послідовність многочленів. Потрібно відмітити, про особливий вклад Берштейна С.Н полягає в тому, що він дав даній теоремі ймовірнісного підтексту, враховуючи схему Бернуллі і закон великих чисел.

З поліномами Берштейна пов’язано чимало проблем (дослідження асимптотичних властивостей збіжності, дослідження асимптотичних властивостей коефіцієнтів, побудова швидких алгоритмів зведення полінома Берштейна до канонічного виду тощо) однак важливо те, що вони забезпечують ***формозберігаюче*** наближення (***Save Preserving Aproximation***).

Поліноми Берштейна є генератором нової системи прогнозування, яка вперше розглянута в цій роботі. В подальшому відповідну систему прогнозування будемо називати ***Bernstein polynomials-модель*** (Bernstein polynomials – поліноми Берштейна). В зв’язку з цим виникає необхідність перевірки прогностичної сили відповідної моделі в контексті інших схем прогнозування, зокрема регресійної та інтерполяційної.

Робота присвячена побудові і практичній перевірці прогностичної сили моделі знаходження прогнозних значень часового ряду на основі многочленів Берштейна.

Відповідна прогностична модель будується за наступним алгоритмом.

Розглянемо часовий ряд , відповідні значення якого позначимо як

$$a_1, \dots, a_{l+1}.$$

Перш за все нам потрібно згенерувати, яку неперервну функцію на основі відповідного ряду. Нехай $f(x)$ ***лінійне сплайно***, яке утворюється послідовним з'єднанням точок $B_r(\frac{r-1}{l};a_r)$. Тобто,

$$B_1(\tfrac{0}{l};a_1), B_2(\tfrac{1}{l};a_2) \dots, B_{l+1}(\tfrac{l}{l};a_{l+1}).$$

Пам'ятаємо, що рівняння прямої, яка проходить через точки $C_1(x_1;y_1), C_2(x_2;y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

або в спрощеному вигляді:

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1.$$

Аналітична формула для лінійного сплайна $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} l(a_2-a_1)\left(x-\frac{0}{l}\right)+a_1, x\in\left[\frac{0}{l};\frac{1}{l}\right]; \\ l(a_3-a_2)\left(x-\frac{1}{l}\right)+a_2, x\in\left[\frac{1}{l};\frac{2}{l}\right]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l(a_{l+1}-a_l)\left(x-\frac{l-1}{l}\right)+a_l, x\in\left[\frac{l-1}{l};\frac{l}{l}\right]. \end{cases}$$

Графічно відповідне сплайно можна зобразити наступним чином:

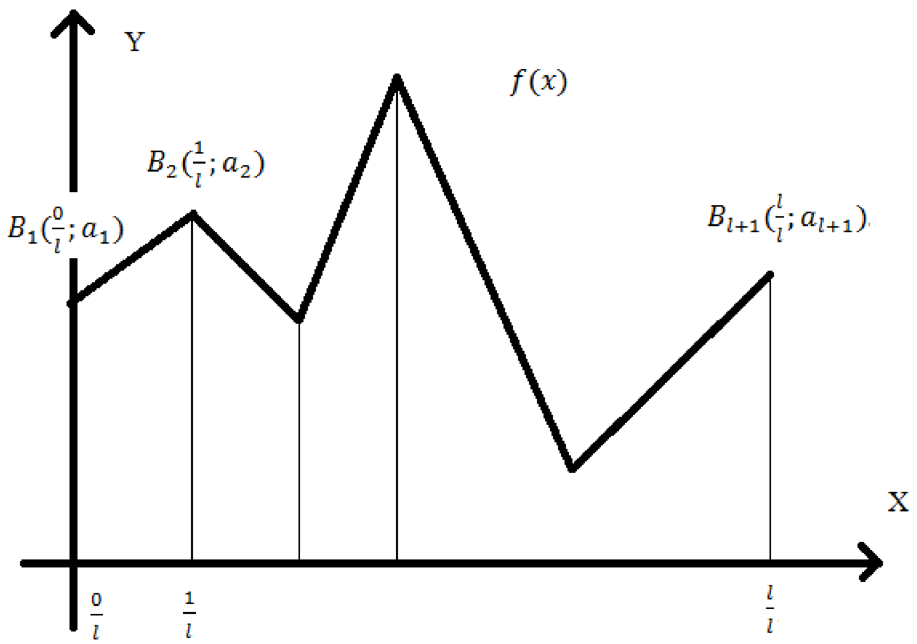

Рис 1. Графік лінійного сплайна.

Прогнозні значення:

$$a_{l+2,n} = B_n\left(f; 1 + \frac{1}{l}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}|_{x=1+\frac{1}{l}}$$

Похибки у відсотках:

$$\Delta_1 = |\frac{a_{l+2,n} - a_{l+2}}{a_{l+2}}|$$

В подальшому ми будемо прогнозувати індекс Доу-Джонса. ***Промисло́вий і́ндекс До́у-Джо́нса*** (англ. *Dow Jones Industrial Average, DJIA, Dow 30*, або неформально *Dow Jones чи The Dow*) − біржовий індекс цінних паперів (акцій) 30 найбільших американських підприємств, створений у 1896 році редактором *The Wall Street Journal* і співзасновником Dow Jones & Company Чарльзом Доу. Індекс був створений для зведення інформації по акціях індустріальних підприємств на американській біржі цінних паперів. Він залишається разом з Dow Jones Transportation Average найстарішим індексом цінних паперів у США.

Значення індексі Доу-Джонса відображені в таблиці. Відповідні інформація була взята з офіційного сайту ***http://www.djaverages.com*****.**

Таблиця 1. Значення індексу DJIA

дата	***Значення індексу DJIA***
12-2015	18129.82
01-2016	17927.22
02-2016	17792.19
03-2016	17061.59
04-2016	16329.15
05-2016	17182.28
06-2016	17728.04
07-2016	17538.91
08-2016	16343.47
09-2016	16284.37
10-2016	17311.43
11-2016	17721.25

Відповідний графік індексу має вигляд:

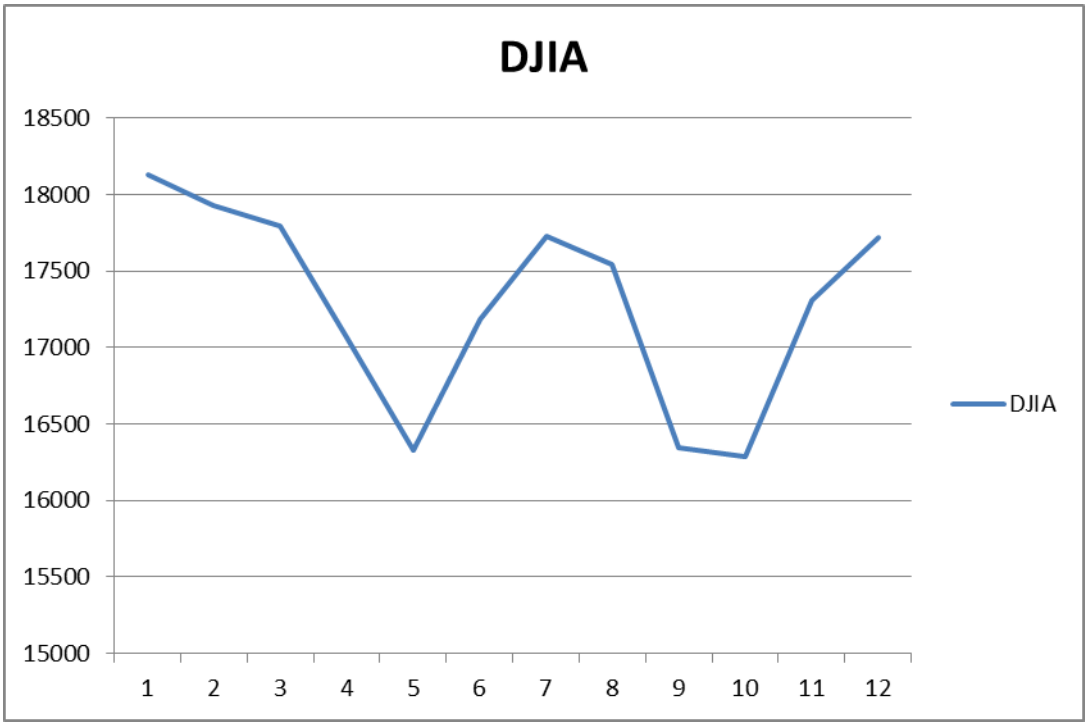

Рис 2. Графік індекса DJIA.

Позначимо відповідні індекси як $x_1, x_2, \dots, x_{12}$.Прогнозування будемо здійснювати по 4 методам за наступною схемою: по п'ятіркам даних $(x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11})$, $(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$, $(x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$, $(x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ отримаємо прогноз $x_{12}^{(k)}, x_{11}^{(k)}, x_{10}^{(k)}, x_9^{(k)}$ значень $x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9$. Будемо використовувати 2 метода прогнозування:

1.Поліном Берштейна 3 степеня;

2.Поліном Берштейна 5 степеня;

Для кожного методу прогнозування рахуємо величину:

$$S_k = (x_{12}^{(k)} - x_{12})^2 + (x_{11}^{(k)} - x_{11})^2 + (x_{10}^{(k)} - x_{10})^2 + (x_{10}^{(k)} - x_{10})^2$$

Той метод, якому відповідає найменше значення S_k і є найкращим.

1.Поліном Берштейна 3 степеня.

У цьому випадку зазначимо, що рівняння сплайна має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 4(a_2 - a_1)(x - 0) + a_1, x \in [0; 0.25]; \\ 4(a_3 - a_2)(x - 0.25) + a_2, x \in [0.25; 0.5]; \\ 4(a_4 - a_3)(x - 0.5) + a_3, x \in [0.5; 0.75]; \\ 4(a_5 - a_4)(x - 0.75) + a_4, x \in [0.75; 1]. \end{cases}$$

Також при підрахункі значень потрібно врахувати, що

$$0 = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{3}} < \frac{1}{4} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} < \frac{2}{4} < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} < 0.75 < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} = 1.$$

Запишемо канонічний розклад многочлена Берштейна:

$$B_3(f) = f(0)(1-x)^3 + 3f\left(\frac{1}{3}\right)x^1(1-x)^2 + 3f\left(\frac{2}{3}\right)x^2(1-x)^1 + f(1)x^3$$

Прогнозне значення:

$$B_3(f)|_{x=1.25} = \frac{-f(0) + 15f\left(\frac{1}{3}\right) - 75f\left(\frac{2}{3}\right) + 125f(1)}{64}$$

Для перевірки потрібно відзначити, що

$$\frac{-1 + 15 - 75 + 125}{64} = 1.$$

Отже, відповідне прогнозування є ковзним середнім з деякими параметрами.

Відповідні результати мають вигляд

		f(0)	f(1/3)	f(2/3)	f(1)	prog 12
17728,04		17728,04	17140,43	16363,17	17311,43	18376,08
17538,91						
16343,47						
16284,37						
17311,43						

		f(0)	f(1/3)	f(2/3)	f(1)	prog 11
17182,28		17182,28	17665	17937,39	16284,37	14656,79
17728,04						
17538,91						
16343,47						
16284,37						

		f(0)	f(1/3)	f(2/3)	f(1)	prog 10
16329,15		16329,15	17364,2	17791,08	16343,47	14886,51
17182,28						
17728,04						
17538,91						
16343,47						

		f(0)	f(1/3)	f(2/3)	f(1)	prog 9
17061,59		17061,59	16613,53	17000,36	17538,91	17960,59
16329,15						
17182,28						
17728,04						
17538,91						

Рис 3. Прогноз поліном Берштейна 3 степеня.

2.Поліном Берштейна 5 степеня.

При підрахункі значень потрібно врахувати, що

$$0 = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{3}} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} < \frac{1}{4} < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} < \frac{2}{4} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} < \frac{3}{4} < \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} < \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}} = 1.$$

Запишемо канонічний розклад многочлена Берштейна:

$$B_5(f) = f(0)(1-x)^5 + 5f\left(\frac{1}{5}\right)x^1(1-x)^4 + 10f\left(\frac{2}{5}\right)x^2(1-x)^3 + 10f\left(\frac{3}{5}\right)x^3(1-x)^2 + 5f\left(\frac{4}{5}\right)x^4(1-x)^1 + f(1)x^5$$

Прогнозне значення:

$$B_5(f)|_{x=1.25} = \frac{-f(0) + 25f\left(\frac{1}{5}\right) - 250f\left(\frac{2}{5}\right) + 1250f\left(\frac{3}{5}\right) - 3125f\left(\frac{4}{5}\right) + 3125f(1)}{1024}$$

Для перевірки потрібно відзначити, що

$$\frac{-1 + 25 - 250 + 1250 - 3125 + 3125}{1024} = 1.$$

Отже, відповідне прогнозування є ***ковзним середнім*** з деякими параметрами.

Відповідні результати мають вигляд

		f(0)	f(1/5)	f(2/5)	f(3/5)	f(4/5)	f(1)	prog 12
17728,04		17728,04	17765,87	18017,09	16378,93	15462,72	17311,43	21653,34
17538,91								
16343,47								
16284,37								
17311,43								

		f(0)	f(1/5)	f(2/5)	f(3/5)	f(4/5)	f(1)	prog 11
17182,28		17182,28	17073,13	17803,69	18256,17	16390,75	16284,37	18014,16
17728,04								
17538,91								
16343,47								
16284,37								

		f(0)	f(1/5)	f(2/5)	f(3/5)	f(4/5)	f(1)	prog 10
16329,15		16329,15	16158,52	16963,98	17841,52	18495,26	16343,47	11449,4
17182,28								
17728,04								
17538,91								
16343,47								

		f(0)	f(1/5)	f(2/5)	f(3/5)	f(4/5)	f(1)	prog 9
17061,59		17061,59	17208,08	15987,9	16854,82	17879,34	17538,91	16035,98
16329,15								
17182,28								
17728,04								
17538,91								

Рис 4. Прогноз поліном Берштейна 5 степеня.

Таблиця з обрахованими значеннями S_k має вигляд:

	method 1	S1	method 2	S2
16343,47	17960,59	2615077	16035,98	94550,1
16284,37	14886,51	1954013	11449,4	23376935
17311,43	14656,79	7047114	18014,16	493829,5
17721,25	18376,08	428802,3	21653,24	15460545
		12045006		39425860

Рис 5. Обрахунок величин S_k.

З відповідних обрахунків випливає, що найкращим методом прогнозування потрібно вважати прогнозування за степенем 3.

Список літератури

1. Авраменко О.В. , Н.Г.Шевченко О.В. Maple 9 та 1230 інтегралів або Символьні обчислення у математичному аналізі. Частина 1. – Кіровоград: 2004. –117 с.
2. Аладьев В. З., Шишаков М.Л. Автоматизированное рабочее место математика.- Лаборатория базовых знаний, 2000.
3. Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.:Наука.,1986. – 176 с.
4. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. — М., 1952. — Т. 1. — С. 105-106.
5. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. — М., 1954. — Т. 3. — С. 310-348.
6. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна. Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1990.
7. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
9. Карташов М.В. "Імовірність, процеси, статистика". Київ, Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 494 р. – 2007.